

Практическое занятие №9

Аппроксимация функций с помощью метода наименьших квадратов.

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений.

Норма времени: 2 часа

Обеспечивающие средства: калькулятор, тетрадь.

Порядок выполнения работы

Метод наименьших квадратов применяется при обработке результатов эксперимента для **аппроксимации** (приближения) **экспериментальных данных** аналитической формулой. Конкретный вид формулы выбирается, как правило, из физических соображений. Такими формулами могут быть:

$$y = ax + b, \quad y = ax^2 + bx + c, \quad y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \\ y = ae^{bx} + c, y = \frac{a}{x} + b \text{ и другие.}$$

Сущность метода наименьших квадратов состоит в следующем. Пусть результаты измерений представлены таблицей:

Таблица 1

x	x ₁	x ₂	...	x _n
y	y ₁	y ₂	...	y _n

Будем считать, что вид **аппроксимирующей** (приближающей) **зависимости** выбран, и её можно записать в виде

$$y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m), \quad m \leq n-1 \quad (1)$$

где f - известная функция, $a_0, a_1, \dots, a_m$ - неизвестные постоянные параметры, значения которых надо найти. В методе наименьших квадратов приближение функции (1) к экспериментальной зависимости считается наилучшим, если выполняется условие

$$Q = Q(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m))^2 = \min \quad (2)$$

то есть **сумма квадратов отклонений искомой аналитической функции от экспериментальной зависимости должна быть минимальна.**

Заметим, что функция Q называется **невязкой**.

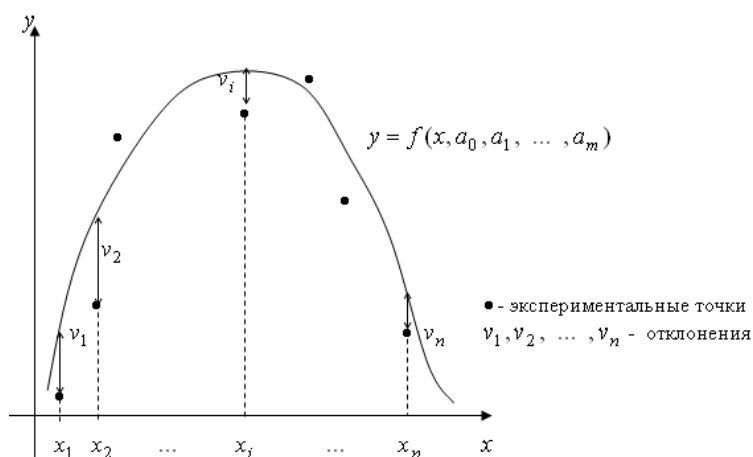


Рис. 5

Так как невязка $Q(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n v_i^2 \geq 0$, то она имеет минимум. Необходимым условием минимума функции нескольких переменных является равенство нулю всех частных производных этой функции по параметрам. Таким образом, отыскание наилучших значений параметров аппроксимирующей функции (1), то есть таких их значений, при которых $Q = Q(a_0, a_1, \dots, a_m)$ минимальна, сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial Q}{\partial a_m} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Методу наименьших квадратов можно дать следующее геометрическое истолкование: среди бесконечного семейства линий данного вида отыскивается одна линия, для которой сумма квадратов разностей ординат экспериментальных точек и соответствующих им ординат точек, найденных по уравнению этой линии, будет наименьшей.

Нахождение параметров линейной функции

Пусть экспериментальные данные надо представить линейной функцией:

$$y = ax + b$$

Требуется подобрать такие значения a и b , для которых функция

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (4)$$

будет минимальной. Необходимые условия минимума функции (4) сводятся к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^2 - bx_i) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

После преобразований получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (5)$$

решая которую, находим искомые значения параметров a и b .

Нахождение параметров квадратичной функции

Если аппроксимирующей функцией является квадратичная зависимость

$$y = ax^2 + bx + c,$$

то её параметры a , b , c находят из условия минимума функции:

$$Q(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \quad (6)$$

Условия минимума функции (6) сводятся к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-x_i^2) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i - ax_i^4 - bx_i^3 - cx_i^2) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-x_i) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^3 - bx_i^2 - cx_i) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-1) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0 \end{cases}$$

После преобразований получаем систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (7)$$

при решении которой находим искомые значения параметров a , b и c .

Пример. Пусть в результате эксперимента получена следующая таблица значений x и y :

Таблица 2

x_i	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
y_i	0,705	0,495	0,426	0,357	0,368	0,406	0,549	0,768

Требуется аппроксимировать экспериментальные данные линейной и квадратичной функциями.

Решение. Отыскание параметров аппроксимирующих функций сводится к решению систем линейных уравнений (5) и (7). Для решения задачи воспользуемся процессором электронных таблиц Excel.

1. Сначала сцепим листы 1 и 2. Занесём экспериментальные значения x_i и y_i в столбцы А и В, начиная со второй строки (в первой строке поместим заголовки столбцов). Затем для этих столбцов вычислим суммы и поместим их в десятой строке.

В столбцах С – G разместим соответственно вычисление и суммирование

$$x_i^2, x_i^3, x_i^4, x_i y_i, x_i^2 y_i.$$

2. Расцепим листы. Дальнейшие вычисления проведём аналогичным образом для линейной зависимости на Листе 1 и для квадратичной зависимости на Листе 2.

3. Под полученной таблицей сформируем матрицу коэффициентов и вектор-столбец свободных членов. Решим систему линейных уравнений по следующему алгоритму:

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Для вычисления обратной матрицы и перемножения матриц воспользуемся **Мастером функций** и функциями **МОБР** и **МУМНОЖ**.

4. В блоке ячеек Н2:Н9 на основе полученных коэффициентов вычислим значения аппроксимирующего полинома y_i выч., в блоке I2:I9 – отклонения $\Delta y_i = y_i$ эксп. - y_i выч., в столбце J – невязку:

$$\sum_{i=1}^8 \Delta y_i^2$$

Полученные таблицы и построенные с помощью **Мастера диаграмм** графики приведены на рисунках 1, 2, 3.

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	y_i выч.	Δy_i	Δy_i^2
0,5	0,705	0,25	0,125	0,0625	0,3525	0,17625	0,481667	0,223333	0,049878
0,6	0,495	0,36	0,216	0,1296	0,297	0,1782	0,489548	0,005452	2,97E-05
0,7	0,426	0,49	0,343	0,2401	0,2982	0,20874	0,497429	-0,07143	0,005102
0,8	0,357	0,64	0,512	0,4096	0,2856	0,22848	0,50531	-0,14831	0,021996
0,9	0,368	0,81	0,729	0,6561	0,3312	0,29808	0,513191	-0,14519	0,02108
1	0,406	1	1	1	0,406	0,406	0,521072	-0,11507	0,013242
1,1	0,549	1,21	1,331	1,4641	0,6039	0,66429	0,528953	0,020047	0,000402
1,2	0,768	1,44	1,728	2,0736	0,9216	1,10592	0,536834	0,231166	0,053438
6,8	4,074	6,2	5,984	6,0356	3,496	3,26596		Невязка:	0,165167
Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	Σx_i^3	Σx_i^4	$\Sigma x_i y_i$	$\Sigma x_i^2 y_i$			
Матрица коэффициентов линейной системы					Свободные члены				
		6,2	6,8			3,496			
		6,8	8			4,074			
		Обратная матрица			Коэффициенты полинома				
		2,380952	-2,02381			0,07881			
		-2,02381	1,845238			0,442262			

Рис. 1. Таблица вычисления коэффициентов линейной функции, аппроксимирующей экспериментальные данные.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	y_i выч.	Δy_i	Δy_i^2
2	0,5	0,705	0,25	0,125	0,0625	0,3525	0,17625	0,69973	0,00528	2,7826E-05
3	0,6	0,495	0,36	0,216	0,1296	0,297	0,1782	0,52068	-0,02568	6,5946E-04
4	0,7	0,426	0,49	0,343	0,2401	0,2982	0,20874	0,40395	0,02206	4,8642E-04
5	0,8	0,357	0,64	0,512	0,4096	0,2856	0,22848	0,34952	0,00748	5,5950E-05
6	0,9	0,368	0,81	0,729	0,6561	0,3312	0,29808	0,35741	0,01060	1,1225E-04
7	1	0,406	1	1	1	0,406	0,406	0,42760	-0,02160	4,6656E-04
8	1,1	0,549	1,21	1,331	1,4641	0,6039	0,66429	0,56010	-0,01110	1,2332E-04
9	1,2	0,768	1,44	1,728	2,0736	0,9216	1,10592	0,75492	0,01308	1,7109E-04
10	6,8	4,074	6,2	5,984	6,0356	3,496	3,26596		Невязка:	2,1029E-03
11	Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	Σx_i^3	Σx_i^4	$\Sigma x_i y_i$	$\Sigma x_i^2 y_i$			
12	Матрица коэффициентов линейной системы					Свободные члены				
13		6,0356	5,984	6,2			3,26596			
14		5,984	6,2	6,8			3,496			
15		6,2	6,8	8			4,074			
16		Обратная матрица			Коэффициенты полинома					
17		59,52381	-101,19	39,88095			3,115476			
18		-101,19	174,4048	-69,8214			-5,2175			
19		39,88095	-69,8214	28,56548			2,529631			

Рис. 2. Таблица вычисления коэффициентов квадратичной функции, аппроксимирующей экспериментальные данные.

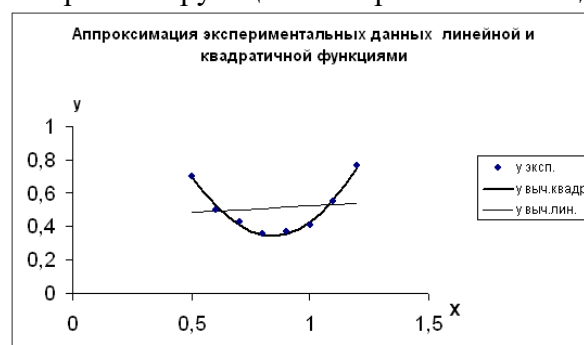


Рис. 3. Графическое представление результатов аппроксимации экспериментальных данных линейной и квадратичной функциями.

Ответ. Аппроксимировали экспериментальные данные линейной зависимостью $y = 0,07881x + 0,442262$ с невязкой $Q = 0,165167$ и квадратичной зависимостью $y = 3,115476x^2 - 5,2175x + 2,529631$ с невязкой $Q = 0,002103$.

Задания. Аппроксимировать функцию, заданную таблично, линейной и квадратичной функциями.

Таблица 3

№1	x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	y	3,030	3,142	3,358	3,463	3,772	3,251	3,170	3,665
№2	x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	y	3,314	3,278	3,262	3,292	3,332	3,397	3,487	3,563
№3	x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
	y	1,045	1,162	1,264	1,172	1,070	0,898	0,656	0,344
№4	x	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4
	y	6,715	6,735	6,750	6,741	6,645	6,639	6,647	6,612
№5	x	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
	y	2,325	2,515	2,638	2,700	2,696	2,626	2,491	2,291
№6	x	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5
	y	1,752	1,762	1,777	1,797	1,821	1,850	1,884	1,944
№7	x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2
	y	1,924	1,710	1,525	1,370	1,264	1,190	1,148	1,127
№8	x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
	y	1,025	1,144	1,336	1,419	1,479	1,530	1,568	1,248
№9	x	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
	y	5,785	5,685	5,605	5,545	5,505	5,480	5,495	5,510
№10	x	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
	y	4,052	4,092	4,152	4,234	4,338	4,468	4,599	4,771

Контрольные вопросы:

1. Постановка задачи аппроксимации функций.
2. Когда применяется интерполяция функций?
3. Что является исходными данными в задаче аппроксимации функций?
4. Постановка задачи аппроксимации функции методом наименьших квадратов.