Практическое занятие №8
Интерполирование сплайнами.

Цель: закрепить умения интерполировать функцию сплайнами и находить ее значение в заданной точке.
Норма времени: 2 часа
Обеспечивающие средства: калькулятор, тетрадь.

Порядок выполнения работы
Теоретические сведения
1. Интерполяция сплайнами

При большом количестве узлов интерполяции сильно возрастает степень интерполяционных многочленов, что делает их неудобными для вычислений.

Высокой степени многочлена можно избежать, разбив отрезок интерполяции на несколько частей, с последующим построением на каждой части самостоятельного интерполяционного многочлена.

Однако такое интерполирование наталкивается на существенный недостаток: в точках стыка разных интерполяционных многочленов бывает разрывной их первая производная.

В этом случае удобно пользоваться особым видом кусочно-полиномиальной интерполяции - интерполяции ***сплайнами***.

Суть этого подхода заключается в следующем:

Определение: Функция S_m (x) называется *интерполяционным сплайном порядка m* для функции f(x), заданной таблицей:

x	x_0	x_1	…	x_i	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_i	…	y_n

если:

1. на каждом отрезке $[x_i\,;\,x_{i+1}]$ (i=0,…,n-1) S(x) является многочленом порядка m;
2. S(x) и её производная до (m-1)-го порядка включительно непрерывны на $[x_0\,;\,x_n]$;
3. $S(x_i)=y_i$ (i=0,…,n) - непосредственно условие интерполяции.

Остановимся на построении наиболее популярных в практике аппроксимации функций *кубических сплайнов*.

По определению кубический сплайн S(x) можно представить в виде

$$S(x)=\begin{cases} P_1(x), & x\in[x_0;x_1];\\ P_2(x), & x\in[x_1;x_2];\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ P_n(x), & x\in[x_{n-1};x_n]. \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Где каждый из $P_i(x)$ - многочлен третьей степени:

$$P_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+C_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3,\, i=\overline{1,n}\ . \qquad \textbf{(2)}$$

Коэффициенты a_i найдем из условия: $y_i=S(x_i)=P_i(x_i)=a_i$, т.е.

$$a_i=y_i \qquad \textbf{(3)}$$

Условие непрерывности S(x) в каждом узле приводит к равенствам:

$$P_i(x_i) = P_{i+1}(x_i), \quad i=\overline{1,n-1}$$

В развернутом виде с учетом формулы (2) эти равенства примут вид:

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + C_{i+1}(x_i - x_{i+1})^2 + d_{i+1}(x_i - x_{i+1})^3 \qquad \textbf{(4)}$$

Введем обозначения: $h_i = x_i - x_{i-1}$

Понижая в равенстве (4) индекс на единицу (меняем i на i-1) и, учитывая (3), получим:

$$h_i b_i - h_i^2 c_i + h_i^3 d_i = y_i - y_{i-1} \qquad \textbf{(5)}$$

Условие непрерывности первой производной кубического сплайна сводится к требованию $P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i), \quad i=\overline{1,n-1}$

Тогда дифференцируя формулу (2) и используя, введите обозначения, получим:

$$b_{i-1} - b_i + 2h_i c_i - 3h_i^2 d_i = 0 \quad (i=\overline{2,n}) \qquad \textbf{(6)}$$

Из условия непрерывности второй производной: $P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i)$ получим:

$$C_{i-1} - C_i + 3h_i d_i = 0 \quad (i=\overline{2,n}) \qquad \textbf{(7)}$$

Составим систему из равенств (5)-(7) и, решив её, найдем коэффициенты b_i, C_i, d_i.

Однако, для однозначной ее разрешимости добавим условия непрерывности на концах отрезка: $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, $P_1''(x_0) = 0,\ P_n''(x_n) = 0$ т.е.

$$\begin{cases} C_1 - 3h_1 d_1 = 0 \\ a_n = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(8)}$$

В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 - 3h_1 d_1 = 0; \\ a_n = 0; \\ h_i b_i - h_i^2 c_i + h_i^3 d_i = y_i - y_{i-1}; \\ b_{i-1} - b_i + 2h_i c_i - 3h_i^2 d_i = 0; \\ C_{i-1} - C_i + 3h_i d_i = 0. \end{cases}$$

Последовательно, исключая переменные получим

$$h_{i+1}C_{i+1} + 2(h_i + h_{i+1})C_i + h_i C_{i-1} = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) \qquad \textbf{(9)}$$

(это уравнение содержит лишь неизвестные C_i).

$$d_i = \frac{C_i - C_{i-1}}{3h_i} \qquad \textbf{(10)}$$

(это уравнение содержит лишь неизвестные d_i).

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + h_i C_i - h_i^2 d_i \qquad \textbf{(11)}$$

(это уравнение содержит лишь неизвестные b_i).

Построив кубический сплайн, найдем оценку погрешности интерполяции:

$$\left|f(x) - S(x)\right| \le \max_{[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right|,$$

где $[a;b]$ - промежуток интерполяции.

2. *Пример построения кубического сплайна для функции y=f(x), заданной таблично*

Пример: Построить кубический сплайн для функции y=f(x), заданной таблицей:

x_i	-1	0	1	2
y_i	1/2	1	2	4

с дополнительным условием: $S''(-1) = S''(2) = 0$. Найти с помощью S(x) значения функции при x=0,3. (Заметим, что в основу таблицы положена функция y $=2^x$).

Решение: $C_0 = 0$ (т.к. не используется в функциях) и $C_3 = 0$ (т.к. из условия (8): $C_n = 0$).

Шаг таблицы $h_i = 1$.

из (9) получаем:

$$\begin{cases} 1\cdot C_2 + 2(1+1)C_1 + 1\cdot C_0 = 3\left(\dfrac{y_2 - y_1}{1} - \dfrac{y_1 - y_0}{1}\right), \ \text{при} \ i = 1, \\ 1\cdot C_3 + 2(1+1)C_2 + 1\cdot C_1 = 3\left(\dfrac{y_3 - y_2}{1} - \dfrac{y_2 - y_1}{1}\right), \ \text{при} \ i = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 + 4C_1 = 3\left(\dfrac{2-1}{1} - \dfrac{1-\frac{1}{2}}{1}\right) = 3\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}, \\ D + 4C_2 + C_1 = 3\left(\dfrac{4-2}{1} - \dfrac{2-1}{1}\right) = 3(2-1) = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 + 4C_1 = \dfrac{3}{2}, \\ 4C_2 + C_1 = 3. \end{cases}$$

$$15C_1 = 6 - 3 = 3,$$

$$C_1 = \frac{1}{5},\ C_2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{5} = \frac{7}{10}.$$

Из (10) имеем:

$$d_1 = \frac{C_1 - C_0}{3h} = \frac{\frac{1}{5} - 0}{3\cdot 1} = \frac{1}{15},$$

$$d_2 = \frac{C_2 - C_1}{3h} = \frac{\frac{7}{10} - \frac{1}{5}}{3} = \frac{1}{6},$$

$$d_3 = \frac{C_3 - C_2}{3h} = \frac{0 - \frac{7}{10}}{3} = -\frac{7}{30}.$$

Из (11) имеем:

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + hC_1 - h^2 d_1 = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1} + 1\cdot\frac{1}{5} - 1^2\cdot\frac{1}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{19}{30},$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{h} + hC_2 - h^2 d_2 = \frac{2-1}{1} + 1\cdot\frac{7}{10} - 1\cdot\frac{1}{6} = 1 + \frac{7}{10} - \frac{1}{6} = \frac{23}{15},$$

$$b_3 = \frac{y_3 - y_2}{h} + hC_3 - h^2 d_3 = \frac{4-2}{1} + 1\cdot 0 - 1\cdot\left(-\frac{7}{30}\right) = 2 + \frac{7}{30} = \frac{67}{30}.$$

По итогу получаем:

$$P_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + C_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, x \in [x_0; x_1],$$

$$P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}(x-0) + \frac{1}{5}(x-0)^2 + \frac{1}{15}(x-0)^3, \text{т.е.} \qquad P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{15}x^3, x \in [-1; 0].$$

$P_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + C_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3, x \in [x_1; x_2]$,

$P_2(x) = 2 + \frac{23}{15}(x-1) + \frac{7}{10}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3, x \in [x_1; x_2]$

$P_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + C_3(x - x_3)^2 + d_3(x - x_3)^3, x \in [x_2; x_3]$, $P_3(x) = 4 + \frac{67}{30}(x-2) - \frac{7}{30}(x-2)^3, x \in [1;2]$

Следовательно, сплайн S(x) построен:

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{15}x^3, x \in [-1;0]; \\ P_2(x) = 2 + \frac{23}{15}(x-1) + \frac{7}{10}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3, x \in [0;1]; \\ P_3(x) = 4 + \frac{67}{30}(x-2) - \frac{7}{30}(x-2)^3, x \in [1;2]. \end{cases}$$

Найдем его значение при x=0,3:

Заметим, что $0{,}3 \in [0;1]$, поэтому используем многочлен $P_2(x)$:

$$P(0.3) = 2 + \frac{23}{15}(0{,}3-1) + \frac{7}{10}(0{,}3-1)^2 + \frac{1}{6}(0{,}3-1)^3 = 1{,}2125.$$

Отметим для сопоставления с той же точностью значение функции, положенной в основу данного примера: $f(x) = 2^x$; $f(0.3) = 2^{0,3} = 1{,}2311$.

Интерполяция сплайнами сопряжена с немалым объемом вычислительной работы. Весьма необычна и форма окончательного результата, ибо сплайн имеет различные представления на различных частичных отрезках интерполяции. Это осложняет доступ к значениям сплайна в каждой конкретной точке, так как предполагает, прежде всего, поиск параметров, определяющих соответствующую форму сплайна. Эти трудности легко предотвратимы при использовании компьютера, так как упорядоченное хранение всех необходимых параметров организовать нетрудно, а выполнение однотипных процедур по вычислению параметров сплайна и его значений может быть обеспечено специальными процедурами.

Задания

Задание 1. По заданной таблице значений функции

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y	y_0	y_1	y_2	y_3

вычислить коэффициенты и составить формулы кубического сплайна.

Задание 2. Результат интерполирования проверить путем вычисления значений сплайна в узловых точках.

Задание 3. Составить программу вычисления значения функции в точке, используя интерполяцию сплайнами.

Задание 4. Сравнить результаты заданий 1 и 5.

Таблица 1

Вариант	x_0	x_1	x_2	x_3	y_0	y_1	y_2	y_3	x
1	-1	0	1	2	-3	5	2	-6	3,8
2	2	3	4	5	4	1	7	2	3,5
3	0	2	4	6	-1	-4	2	-8	0,5
4	7	9	11	13	2	-2	3	-4	4,8
5	-3	-1	1	3	7	-1	4	-6	4,1

6	1	2	3	4	-3	-7	2	8	3,9
7	-1	1	3	5	4	9	1	6	3,3
8	2	4	6	7	9	-3	6	-2	4,0
9	-4	-2	0	2	2	8	5	10	2,9
10	-1	0	1	2	4	-7	1	-8	5,3
11	2	4	6	8	-1	-6	3	12	4,1
12	-9	-7	-5	-3	3	-3	4	-9	7,6
13	0	1	2	3	7	-1	8	2	4,4
14	-8	-7	-6	-5	9	-2	4	6	2,5
15	-7	-5	-3	-1	4	-4	5	10	5,2

Контрольные вопросы:

1. Как ставится задача интерполяции?
2. Какие виды интерполяции вы знаете?
1. В чем суть и геометрический смысл линейной интерполяции?
2. Как выглядит оценка точности при интерполировании многочленом?
3. Что можно сказать об оценке погрешности при решении задачи интерполирования непрерывной функции, если не накладывать на нее никаких дополнительных ограничений?
4. Что такое сплайн-интерполяция и в чем ее суть?
    1. Какие трудности возникают при интерполировании сплайнами?