Практическое занятие №7

Тема: «Составление интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона»

Цель: получение практических навыков составления интерполяционных формул Ньютона и Лагранжа и определение по ним значений функций

Количество часов: 2 часа

Оборудование: калькулятор.

Краткая теория

Из курса математического анализа известны три способа задания функциональных зависимостей: аналитический, графический, табличный

Пусть на отрезке [a;b] задана функция $y = f(x)$ своими n+1 значениями $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ которые назовем узлами интерполирования.

Требуется найти аналитически выражение $F(x)$ табулированной функции совпадающей в узлах интерполяции со значениями заданной функции.

Формула Лагранжа для не равноотстоящих узлов

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{D_i}, \text{где} \quad \Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)..(x - x_n)$$

Формула Лагранжа для равноотстоящих узлов

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(t)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(t-i)C_i}, \text{где} \quad \Pi_{n+1}(t) = t(t-1)(t-2)..(t-n) \quad C_i = (-1)^{n-i}\, i!(n-i)!$$

Конечная разность

Конечной разностью n-го порядка – это разность между конечными разностями (n-1) порядка $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y)$

Первая интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)..(q-n+1)}{h!}\Delta^n y_0, \text{ где } \quad q = \frac{x - x_0}{h}$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \text{ где } \quad q = \frac{x - x_n}{h}$$

Пояснение к работе

Задание А. Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана:

1) в неравноотстоящих узлах таблицы;
2) в равноотстоящих узлах таблицы.

1)

x	y
0,05	0,050042
0,10	0,100335
0,17	0,171657
0,25	0,255342
0,30	0,309336
0,36	0,376403

Вычислить значение функции $y(x)$ при $x = 0{,}263$

2)

x	y
0,101	1,26183
0,106	1,27644
0,111	1,29122
0,116	1,30617
0,121	1,32130
0,126	1,32660

Определить значение функции $y(x)$ при $x = 0{,}1157$

Решение :

1) Воспользуемся формулой $f(x) \approx \Pi_{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n}(y_i / D_i)$

где $\Pi_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)..(x - x_n)$, $\quad D_i = (x_i - x_0)(x_i - x_1)..(x_i - x_{i-1})(x - x_i)(x_i - x_{i+1})..(x_i - x_n)$

Вычисления приведены в таблице.

разности						D_i	y_i / D_i
0,213	-0,05	-0,12	-0,2	-0,25	-0,31	$-19{,}81*10^{-6}$	-2526,225453
0,05	0,163	-0,07	-0,15	-0,2	-0,26	$4{,}45*10^{-6}$	22547,6977
0,12	0,07	0,093	-0,08	-0,13	-0,19	$-1{,}54*10^{-6}$	-111201,9347
0,2	0,15	0,08	0,013	-0,05	-0,11	$0{,}17*10^{-6}$	1488006,993
0,25	0,2	0,13	0,05	-0,037	-0,06	$0{,}72*10^{-6}$	428740,1247
0,31	0,26	0,19	0,11	0,06	-0,097	$-9{,}80*10^{-6}$	-38392,70957
						$\Pi_{5+1} = 0{,}1506492 \cdot 10^{-6}$	$\sum_{i=0}^{5}(y_i / D_i) = 1790173{,}8.$

Итак, $\Pi_{5+1} = 0{,}1506492 \cdot 10^{-6}$, $\sum_{i=0}^{5}(y_i / D_i) = 1790173{,}8.$ Следовательно,

$$f(0{,}263) \approx \Pi_{5+1} \cdot \sum_{i=0}^{5}(y_i / D_i) = 0{,}1506492 \cdot 10^{-6} \cdot 1790173{,}8 = 0{,}269678$$

Ответ: $f(0{,}263) \approx 0{,}269678$

2) Для вычислений используем формулу $f(x) = y(x) \approx \Pi_{n+1}(t) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(t-i)C_i}$,

где $\Pi_{n+1}(t) = t(t-1)..(t-n)$; $t = (x - x_0)/h$; $h = x_{i+1} - x_i$; $C_i = (-1)^{n-i} \cdot i! \cdot (n-i)!$.

Здесь $t = (0{,}1157 - 0{,}101)/0{,}005 = 2{,}94.$ Вычисления располагаем в таблице.

i	x_i	l_i'	$t-i$	C_i	$(t-i) \cdot C_i$	$\frac{y_i}{(t-i)C_i}$
0	0,101	1,26183	2,94	-120	-352,8	-0,0035766
1	0,106	1,27644	1,94	24	46,56	0,0274149
2	0,111	1,29122	0,94	-12	-11,28	-0,1144691
3	0,116	1,30617	-0,06	12	-0,72	-1,8141250
4	0,121	1,32130	-1,06	-24	25,44	0,0519379
5	0,126	1,33660	-2,06	120	-247,2	-0,0054069
			$\Pi_{5+1}(t) = -0{,}7024271;$			$\sum_{i=0}^{5} \frac{y_i}{(t-i)C_i} = -1{,}858225.$

Итак, $\Pi_{5+1}(t) = -0{,}7024271$; $\sum_{i=0}^{5} \frac{y_i}{(t-i)C_i} = -1{,}858225.$ Следовательно, $f(0{,}1157) \approx 1{,}30527.$

Ответ: $f(0{,}1157) \approx 1{,}30527.$

<u>Задание Б.</u> Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значения функции при данных значениях аргумента

x	1,215	1,220	1,225	1,230	1,235	1,240	1,245	1,250	1,255	1,260
f(x)	0,106044	0,113276	0,119671	0,125324	0,130328	0,134776	0,138759	0,142367	0,145688	0,148809

Определить значения функции $y(x)$ при следующих значениях аргумента:

1) $x_1 = 1{,}2273$ 2) $x_2 = 1{,}253$ 3) $x_3 = 1{,}210$ 4) $x_4 = 1{,}2638$

Решение :

Составим таблицу конечных разностей. Для контроля вычислений добавим к ней две строки: в строке $\sum$ запишем суммы элементов столбцов конечных разностей, а в строке P - разности крайних значений столбцов.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,215	0,106044	0,007232	-0,000837	0,000095
1,220	0,113276	0,006395	-0,000742	0,000093
1,225	0,119671	0,005653	-0,000649	0,000093
1,230	0,125324	0,005004	-0,000556	0,000091
1,235	0,130328	0,004448	-0,000465	0,000090
1,240	0,134776	0,003983	-0,000375	0,000088
1,245	0,138759	0,003608	-0,000287	0,000087
1,250	0,142367	0,003321	0,000200	-
1,255	0,145688	0,003121	-	-
1,260	0,148809	-	-	-

При составлении таблицы разностей ограничиваемся разностями третьего порядка, так как они практически постоянны. Для вычисления значений функции при $x = 1{,}2273$ и $x = 1{,}210$ воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед:

$$y(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0, \qquad \text{где} \quad q = (x - x_0)/h.$$

1) Если $x = 1{,}2273$, то примем $x_0 = 1{,}225$; тогда $q = \dfrac{1{,}2273 - 1{,}225}{0{,}005} = 0{,}46,$

$$y(1{,}2273) \approx 0{,}119671 + 0{,}46 \cdot 0{,}005653 + \frac{0{,}46(-0{,}54)}{2}(-0{,}000649) + \frac{0{,}46(-0{,}54)(-1{,}54)}{6}0{,}000093 =$$

$$= 0{,}119671 + 0{,}0026004 + 0{,}0000806 + 0{,}0000059 = 0{,}1223579 \approx 0{,}122358$$

2) Если $x = 1{,}210$, то примем $x_0 = 1{,}215$; тогда $q = \dfrac{1{,}210 - 1{,}215}{0{,}005} = -1$

$$y(1{,}210) \approx 0{,}106044 + (-1)0{,}007232 + \frac{(-1)(-2)}{2}(-0{,}000837) + \frac{(-1)(-2)(-3)}{6} \times 0{,}000095 = 0{,}097880.$$

Для вычислений значений функции при $x = 1{,}253$ и $x = 1{,}2638$ воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования назад:

$$y(x) \approx y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3}, \qquad \text{где} \quad q = (x - x_n)/h.$$

3) Если $x = 1{,}253$, то примем $x_n = 1{,}255$; тогда $q = \dfrac{1{,}253 - 1{,}255}{0{,}005} = -0{,}4,$

$$y(1{,}253) \approx 0{,}145688 + (-0{,}4)0{,}003321 + \frac{(-0{,}4)0{,}6}{2}(-0{,}000287) + \frac{(-0{,}4)0{,}6 \cdot 1{,}6}{6} \times 0{,}000088 = 0{,}097880 -$$

$$-0{,}0013284 + 0{,}0000344 - 0{,}0000056 = 0{,}1443884 \approx 0{,}144388.$$

4) Если $x = 1{,}2638$, то примем $x_n = 1{,}260$; тогда $q = \dfrac{1{,}2638 - 1{,}260}{0{,}005} = 0{,}76,$

$$y(1{,}2638) \approx 0{,}148809 + 0{,}76 \cdot 0{,}003121 + \frac{0{,}76 \cdot 1{,}76}{2}(-0{,}000200) + \frac{0{,}76 \cdot 1{,}76 \cdot 2{,}76}{6} \times 0{,}000087 =$$

$$= 0{,}148809 + 0{,}0023720 - 0{,}0001338 + 0{,}0000535 = 0{,}1511007 \approx 0{,}151101.$$

Ответ: y(1,2273)=0,122358; y(1,210)=0,097880; y(1,253)=0,144388; y(1,2638)=0,151101

Задание

Задание А. Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана:

1) в неравноотстоящих узлах таблицы; 2) в равноотстоящих узлах таблицы.

Варианты к заданию 1)

Таблица 1

x	y	№ варианта	x
0,43	1,63597	11	0,702
0,48	1,73234	7	0,512
0,55	1,87686	13	0,645
0,62	2,03345	19	0,736
0,70	2,22846	25	0,608
0,75	2,35973		

Таблица 2

x	y	№ варианта	x
0,02	1,02316	2	0,102
0,08	1,09590	8	0,114
0,12	1,14725	14	0,125
0,17	1,21483	20	0,203
0,23	1,30120	26	0,154
0,30	1,40976		

Таблица 3

x	y	№ варианта	x
0,35	2,73951	3	0,526
0,41	2,30080	9	0,453
0,47	1,96864	15	0,482
0,51	1,78776	21	0,552
0,56	1,59502	27	0,436
0,64	1,34310		

Таблица 4

x	y	№ варианта	x
0,41	2,57418	4	0,616
0,46	2,32513	10	0,478
0,52	2,09336	16	0,665
0,60	1,86203	22	0,537
0,65	1,74926	28	0,673
0,70	1,62098		

Таблица 5

x	y	№ варианта	x
0,68	0,80860	5	0,896
0,73	0,89492	11	0,812
0,80	1,02964	17	0,774
0,88	1,20966	23	0,955
0,93	1,34087	29	0,715
0,99	1,52368		

Таблица 6

x	y	№ варианта	x
0,11	9,05421	6	0,314
0,15	6,61659	12	0,235
0,21	4,69170	18	0,332
0,29	3,35106	24	0,275
0,35	2,73951	30	0,186
0,40	2,36522		

Варианты к заданию 2)

Таблица 1

x	y	№ варианта	x
1,375	5,04192	1	1,3832
1,380	5,17744	7	1,3926
1,385	5,32016	13	1,3862
1,390	5,47069	19	1,3934
1,395	5,62968	25	1,3866
1,400	5,79788		

Таблица 2

x	y	№ варианта	x
0,115	8,65729	2	0,1264
0,120	8,29329	8	0,1315
0,125	7,95829	14	0,1232
0,130	7,64893	20	0,1334
0,135	7,36235	26	0,1285
0,140	7,09613		

Таблица 3

x	y	№ варианта	x
0,150	6,61659	3	0,1521
0,155	6,39989	9	0,1611
0,160	6,19658	15	0,1662
0,165	6,00551	21	0,1542
0,170	5,82558	27	0,1625
0,175	5,65583		

Таблица 4

x	y	№ варианта	x
0,180	5,61543	4	0,1838
0,185	5,46693	10	0,1875
0,190	5,32634	16	0,1944
0,195	5,19304	22	0,1976
0,200	5,06649	28	0,2038
0,205	4,94619		

Таблица 5

x	y	№ варианта	x
0,210	4,83170	5	0,2121
0,215	4,72261	11	0,2165
0,220	4,61855	17	0,2232
0,225	4,51919	23	0,2263
0,230	4,42422	29	0,2244
0,235	4,33337		

Таблица 6

x	y	№ варианта	x
1,415	0,888551	6	1,4179
1,420	0,889599	12	1,4258
1,425	0,890637	18	1,4396
1,430	0,891667	24	1,4236
1,435	0,892687	30	1,4315
1,440	0,893698		

Задание Б. Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значения функции при данных значениях аргумента.

Таблица 1

x	y
1,415	0,888551
1,420	0,889599
1,425	0,890637
1,430	0,891667
1,435	0,892687
1,440	0,893698
1,445	0,894700
1,450	0,895693
1,455	0,896677
1,460	0,897653
1,465	0,898619

№	Значения аргумента			
варианта	X_1	X_2	X_3	X_4
1	1,4161	1,4625	1,4135	1,470
11	1,4179	1,4633	1,4124	1,4655
21	1,4263	1,4575	1,410	1,4662

Таблица 2

x	y
0,101	1,26183
0,106	1,27644
0,111	1,29122
0,116	1,30617
0,121	1,32130
0,126	1,33660
0,131	1,35207
0,136	1,36773
0,141	1,38357
0,146	1,39959
0,151	1,41579

№	Значения аргумента			
варианта	X_1	X_2	X_3	X_4
2	0,1026	0,1440	0,099	0,161
12	0,1035	0,1492	0,096	0,153
22	0,1074	0,1485	0,1006	0,156

Таблица 3

x	y
0,15	0,860708
0,20	0,818731
0,25	0,778801
0,30	0,740818
0,35	0,704688
0,40	0,670320
0,45	0,637628
0,50	0,606531
0,55	0,576950
0,60	0,548812
0,65	0,522046
0,70	0,496585
0,75	0,4722367

№	Значения аргумента			
варианта	X_1	X_2	X_3	X_4
3	0,1511	0,7250	0,1430	0,80
13	0,1535	0,7333	0,100	0,7540
23	0,1525	0,6730	0,1455	0,85

Таблица 4

x	y
0,180	5,61543
0,185	5,46693
0,190	5,32634
0,195	5,19304
0,200	5,06649
0,205	4,94619
0,210	4,83170
0,215	4,72261
0,220	4,61855
0,225	4,51919
0,230	4,42422
0,235	4,33337

№	Значения аргумента			
варианта	X_1	X_2	X_3	X_4
4	0,1817	0,2275	0,175	0,2375
14	0,1827	0,2292	0,1776	0,240
24	0,1873	0,2326	0,1783	0,245

Таблица 5

x	y
3,50	33,1154
3,55	34,8133
3,60	36,5982
3,65	38,4747
3,70	40,4473
3,75	42,5211
3,80	44,7012
3,85	46,9931
3,90	49,4024
3,95	51,9354
4,00	54,5982
4,05	57,3975
4,10	60,3403
4,15	63,4340
4,20	66,6863

№	Значения аргумента			
варианта	X_1	X_2	X_3	X_4
5	3,522	4,176	3,475	4,25
15	3,543	4,184	3,488	4,30
25	3,575	4,142	3,45	4,204

Таблица 6

x	y
0,115	8,65729
0,120	8,29329
0,125	7,95829
0,130	7,64893
0,135	7,36235
0,140	7,09613
0,145	6,84815
0,150	6,61659
0,155	6,39986
0,160	6,19658
0,165	6,00551
0,170	5,82558
0,175	5,65583
0,180	5,49543

№	Значения аргумента			
варианта	X_1	X_2	X_3	X_4
6	0,1217	0,1736	0,1141	0,185
16	0,1168	0,1745	0,110	0,1825
26	0,1175	0,1773	0,1134	0,190

Таблица 7

x	y
1,340	4,25562
0,345	4,35325
1,350	4,45522
1,355	4,56184
1,360	4,67344
1,365	4,79038
1,370	4,91306
1,375	5,04192
1,380	5,17744
1,385	5,32016
1,390	5,47069
1,395	5,62968

№	Значения аргумента			
варианта	X_1	X_2	X_3	X_4
7	1,3617	1,3921	1,3359	1,400
17	1,3463	1,3868	1,335	1,3990
27	1,3432	1,3936	1,3365	1,3975

Таблица 8

x	y
0,01	0,991824
0,06	0,951935
0,11	0,913650
0,16	0,876905
0,21	0,841638
0,26	0,807789
0,31	0,775301
0,36	0,744120
0,41	0,714193
0,46	0,685470
0,51	0,657902
0,56	0,631442

№	Значения аргумента			
варианта	X_1	X_2	X_3	X_4
8	0,027	0,525	0,008	0,61
18	0,1243	0,492	0,0094	0,66
28	0,083	0,5454	0,0075	0,573

Таблица 9

x	y
0,15	4,4817
0,16	4,9530
0,17	5,4739
0,18	6,0496
0,19	6,6859
0,20	7,3891
0,21	8,1662
0,22	9,0250
0,23	9,9742
0,24	11,0232
0,25	12,1825
0,26	13,4637

№	Значения аргумента			
варианта	X_1	X_2	X_3	X_4
9	0,1539	0,2569	0,14	0,2665
19	0,1732	0,2444	0,1415	0,27
29	0,1648	0,2550	0,1387	0,28

Таблица 10

x	y
0,45	20,1946
0,46	19,6133
0,47	18,9425
0,48	18,1746
0,49	17,3010
0,50	16,3123
0,51	15,1984
0,52	13,9484
0,53	12,5508
0,54	10,9937
0,55	9,2647
0,56	7,3510

№	Значения аргумента			
варианта	X_1	X_2	X_3	X_4
10	0,455	0,5575	0,44	0,5674
20	0,4732	0,5568	0,445	0,57
30	0,4675	0,5511	0,4423	0,58

Контрольные вопросы

1. Какие существуют способы задания функций?
2. Математическая постановка задачи.
3. Что такое интерполирование? экстраполирование?
4. Запишите интерполяционную формулы Лагранжа для равноотстоящих узлов интерполяции? неравноотстоящих?
5. Запишите Первую интерполяционную формулу Лагранжа? Вторую?