Практическое занятие №6
Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Зейделя.

Цель: Закрепить навыки решения систем алгебраических уравнений приближёнными методом.
Норма времени: 2 часа
Оборудование: компьютеры, Программа MS Office Excel.

Порядок выполнения работы
Теоретические сведения

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений $AX = b$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$ - матрица размерности $m \times m$,

$X = (x_1, x_2, ..., x_m)^T$ - вектор решения, $b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$ – вектор правых частей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2, \\ \quad\quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mm}x_m = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Численные методы решения данной системы принято разделять на два класса: прямые методы («точные») и итерационные.

Прямыми методами называются методы, позволяющие получить решение системы уравнений (1) за конечное число арифметических операций.

К прямым методам относятся метод Крамера, метод Гаусса и ряд других методов. Основным недостатком прямых методов является то, что для нахождения решения необходимо выполнить большое число операций.

Суть итерационных методов состоит в том, что решение системы (1) находится как предел последовательных приближений $X^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)$ при $n \to \infty$, где n - номер итерации. Применение итерационных методов требует задания начального значения неизвестных $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right)$ (обычно берут $x_i^{(0)} = 0$ для *i=1,2,...,m*) и точности вычислений $\varepsilon > 0$. Вычисления проводятся до тех пор, пока не будут выполнены оценки

$$\left|x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}\right| < \varepsilon, \quad \forall i = \overline{1,m}.$$

Основное достоинство итерационных методов состоит в том, что точность искомого решения задается.

Различные итерационные методы отличаются формулами расчета очередного приближения. Для получения расчетных формул выполним следующие действия: из *i*-го уравнения системы (1) выразим x_i :

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}x_j\right), \quad i = 1,2,...,m.$$

Эти равенства являются основными для расчетных формул методов Якоби и Зейделя.

Метод Якоби: $$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}x_j^{(n)}\right), \quad i = 1,2,...,m \qquad (2)$$

Данная формула используется для вычисления последующего приближения $X^{(n+1)} = \left(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)},...., x_m^{(n+1)}\right)$ по известному приближению $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)},...., x_m^{(n)}\right)$, координаты которого поставляются в правую часть.

Метод Зейделя: $$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}x_j^{(n)}\right), \quad i = 1,2,...,m. \qquad (3)$$

Особенностью метода Зейделя является то, что при вычислении x_i^{n+1} используются уже полученные $x_1^{n+1}, x_2^{n+1},...., x_{i-1}^{n+1}$.

Условием сходимости метода Зейделя является диагональное преобладание матрицы A, т.е. $|\grave{a}_{ii}| \geq \sum |a_{ij}|$, $i \neq j$, (4)
и хотя бы для одной строчки должно быть строгое неравенство. Для метода простой итерации условие может быть строгим, т.е. $|\grave{a}_{ii}| > \sum |a_{ij}|$, $i \neq j$ (4.а)

Образец выполнения задания:

1 шаг. Проверка сходимости метода Зейделя (рис.1).

Для решения СЛАУ $\begin{cases} 4{,}2x_1 - 1{,}3x_2 + x_3 - 0{,}25x_4 = -1{,}56 \\ 1{,}42x_1 - 10{,}3x_2 + 0{,}25x_3 - 2{,}5x_4 = 2{,}5 \\ 2{,}2x_1 + 1{,}75x_2 - 4{,}5x_3 - 0{,}15x_4 = -1{,}5 \\ 1{,}4x_1 - 1{,}3x_2 + 3{,}2x_3 - 9{,}5x_4 = 0{,}5 \end{cases}$ при помощи MS Excel, нам необходимо проверить сходимость методов постой итерации и метода Зейделя для данного СЛАУ по формуле (2).

Сравним модули диагональных элементов с суммой модулей остальных элементов.

Вычислим суммы модулей не диагональных элементов:
$$\begin{gathered} |-1{,}3| + |1| + |-0{,}25| = |2{,}55| \\ |1{,}42| + |0{,}25| + |-2{,}5| = |4{,}17| \\ |2{,}2| + |1{,}75| + |-0{,}15| = |4{,}1| \\ |1{,}4| + |-1{,}3| + |3{,}2| = |5{,}9|, \end{gathered}$$

сравним результаты с модулями диагональных элементов

$$\begin{gathered} |4{,}2| \geq 2{,}55 \\ |-10{,}3| \geq 4{,}17 \\ |-4{,}5| \geq 4{,}1 \\ |-9{,}5| \geq 5{,}9. \end{gathered} \qquad (5)$$

Неравенства верны, выполняются строгие неравенства во всех четырех случаях. Следовательно, метод Зейделя можно применять.

Эту поверку можно сделать в *Рабочей книге* MS Excel. Откроем новый *Лист Рабочей книги*. Переименуем его. Назовем «Проверка».
В ячейку A1 внести надпись «Матрица *A*».
В ячейки A2:D5 вносим матрицу коэффициентов системы

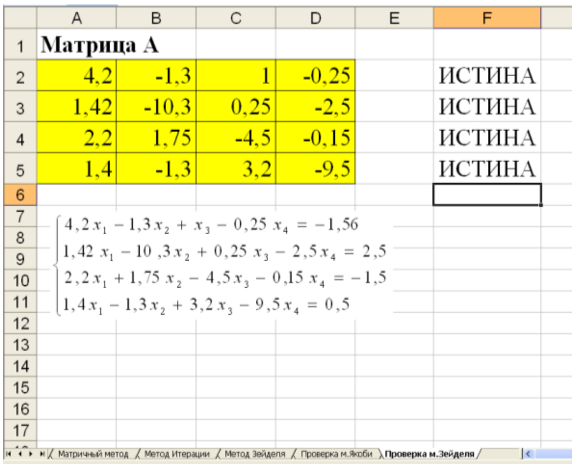
$$\begin{pmatrix} 4{,}2 & -1{,}3 & 1 & -0{,}25 \\ 1{,}42 & -10{,}3 & 0{,}25 & -2{,}5 \\ 2{,}2 & 1{,}75 & -4{,}5 & -0{,}15 \\ 1{,}4 & -1{,}3 & 3{,}2 & -9{,}5 \end{pmatrix}.$$

В диапазон F2:F5 внесем формулы (5):
F2:=ABS(A2)>ABS(B2)+ABS(C2)+ABS(D2);
F3:=ABS(B3)>ABS(A3)+ABS(C3)+ABS(D3);
F4:=ABS(C4)>ABS(A4)+ABS(B4)+ABS(D4);
F5:=ABS(D5)>ABS(A5)+ABS(B5)+ABS(C5).
В ячейках F2:F5 должна появиться надпись «ИСТИНА» (рис.2).
Значит мы можем применять наши методы простой итерации и Зейделя.

2 шаг. Выразим x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{aligned} x_1^{(n)} &= \left(-1{,}56 + 1{,}3x_2^{(n-1)} - x_3^{(n-1)} + 0{,}25x_4^{(n-1)}\right)/4{,}2; \\ x_2^{(n)} &= -\left(2{,}5 - 1{,}42x_1^{(n-1)} - 0{,}25x_3^{(n-1)} + 2{,}5x_4^{(n-1)}\right)/10{,}3; \\ x_3^{(n)} &= -\left(-1{,}5 - 2{,}2x_1^{(n-1)} - 1{,}75x_2^{(n-1)} + 0{,}15x_4^{(n-1)}\right)/4{,}5; \\ x_4^{(n)} &= -\left(0{,}5 - 1{,}4x_1^{(n-1)} + 1{,}3x_2^{(n-1)} - 3{,}2x_3^{(n-1)}\right)/9{,}5. \end{aligned},$$

начальные приближения: $x_1^{(0)} = 0; x_2^{(0)} = 0; x_3^{(0)} = 0; x_4^{(0)} = 0$.



	A	B	C	D	E	F
1	Матрица А					
2	4,2	-1,3	1	-0,25		ИСТИНА
3	1,42	-10,3	0,25	-2,5		ИСТИНА
4	2,2	1,75	-4,5	-0,15		ИСТИНА
5	1,4	-1,3	3,2	-9,5		ИСТИНА

$$\begin{cases} 4{,}2x_1 - 1{,}3x_2 + x_3 - 0{,}25x_4 = -1{,}56 \\ 1{,}42x_1 - 10{,}3x_2 + 0{,}25x_3 - 2{,}5x_4 = 2{,}5 \\ 2{,}2x_1 + 1{,}75x_2 - 4{,}5x_3 - 0{,}15x_4 = -1{,}5 \\ 1{,}4x_1 - 1{,}3x_2 + 3{,}2x_3 - 9{,}5x_4 = 0{,}5 \end{cases}$$

Рис.2

3 шаг. В ячейку A1 внести надпись «*n*», в ячейку B1 внести надпись «$x_1^{(n-1)}$», в ячейку C1 внести надпись «$x_2^{(n-1)}$», в ячейку D1 внести надпись«$x_3^{(n-1)}$», в ячейку E1 внести надпись «$x_4^{n-1)}$», в ячейку F1 внести надпись «x_1^n», в ячейку G1 внести надпись «x_2^n», в ячейку H1 внести надпись «x_3^n», в ячейку I1 внести надпись «x_4^n», в ячейку J1 внести надпись «*eps1*», в ячейку K1 внести надпись «*eps2*», в ячейку L1 внести надпись «*eps3*», в ячейку M1 внести надпись «*eps4*», в ячейку N1 внести надпись «*Eps*».

В столбцах B-E будут храниться значения на шаге *n-1*, в столбцах F-I вычисляются значения на шаге *n*, в столбцах J-M будем смотреть достигнута ли

необходимая точность, если да, то будет надпись «Stop», если нет – «next». В ячейке N2 будет храниться необходимая точность – 0,0001.
Заполним ячейки для вычисления:
A2:=0;
B2:=0;
C2:=0;
D2:=0;
E2: =0;
F2: = (-1,56+1,3*C2-D2+0,25*E2)/4,2;
G2: = -(2,5-1,42*F2-0,25*D2+2,5*E2)/10,3;
H2: = -(-1,5-2,2*F2-1,75*G2+0,15*E2)/4,5;
I2: =-(0,5-1,4*F2+1,3*G2-3,2*H2)/9,5;
J2: =ЕСЛИ(ABS(F2-B2)<N2;"Stop";"next");
K2: =ЕСЛИ(ABS(G2-C2)<N2;"Stop";"next");
L2: =ЕСЛИ(ABS(H2-D2)<N2;"Stop";"next");
M2: =ЕСЛИ(ABS(I2-E2)<N2;"Stop";"next");
A3:=1;
B3:=F2;
C3:=G2;
D2:=H2;
E2:=I2;
ячейки J2:M2 копируем в J3:M3.
Выделяем диапазон A2:A3 и при помощи автозаполнения протянуть до 20-й строки.
Выделить диапазон D3:M3 и копируем до появления в столбцах J-M надписи «Stop». В нашем случае остановка произойдет в 11 строке. Корни находятся в ячейках F7, G7, H7, I7.
4 шаг. Сделаем проверку.
В ячейку A28 внести надпись «Проверка», в ячейку A29 внести надпись «Матрица *A*», в ячейку E29 внести надпись «вектор *x*», в ячейку F29 внести надпись «вектор *b*».

Внесем ячейки A30:E33 основную матрицу: $\begin{pmatrix} 4,2 & -1,3 & 1 & -0,25 \\ 1,42 & -10,3 & 0,25 & -2,5 \\ 2,2 & 1,75 & -4,5 & -0,15 \\ 1,4 & -1,3 & 3,2 & -9,5 \end{pmatrix}$

в ячейки E30:E33 внесем полученные решения: E30:=F7; E31:=G7; E32:=H7; E33:=I7.
Выделим диапазон F30:F33.
Внесем в ячейку 30:= *МУМНОЖ(A30:D33;E30:E33)- Ctrl+Shift+Enter*. Появится вектор $\begin{pmatrix} -1,56001 \\ 2,500207 \\ -1,49981 \\ 0,500078 \end{pmatrix}$, при округлении до сотых равный вектору *b*.

Ответ:

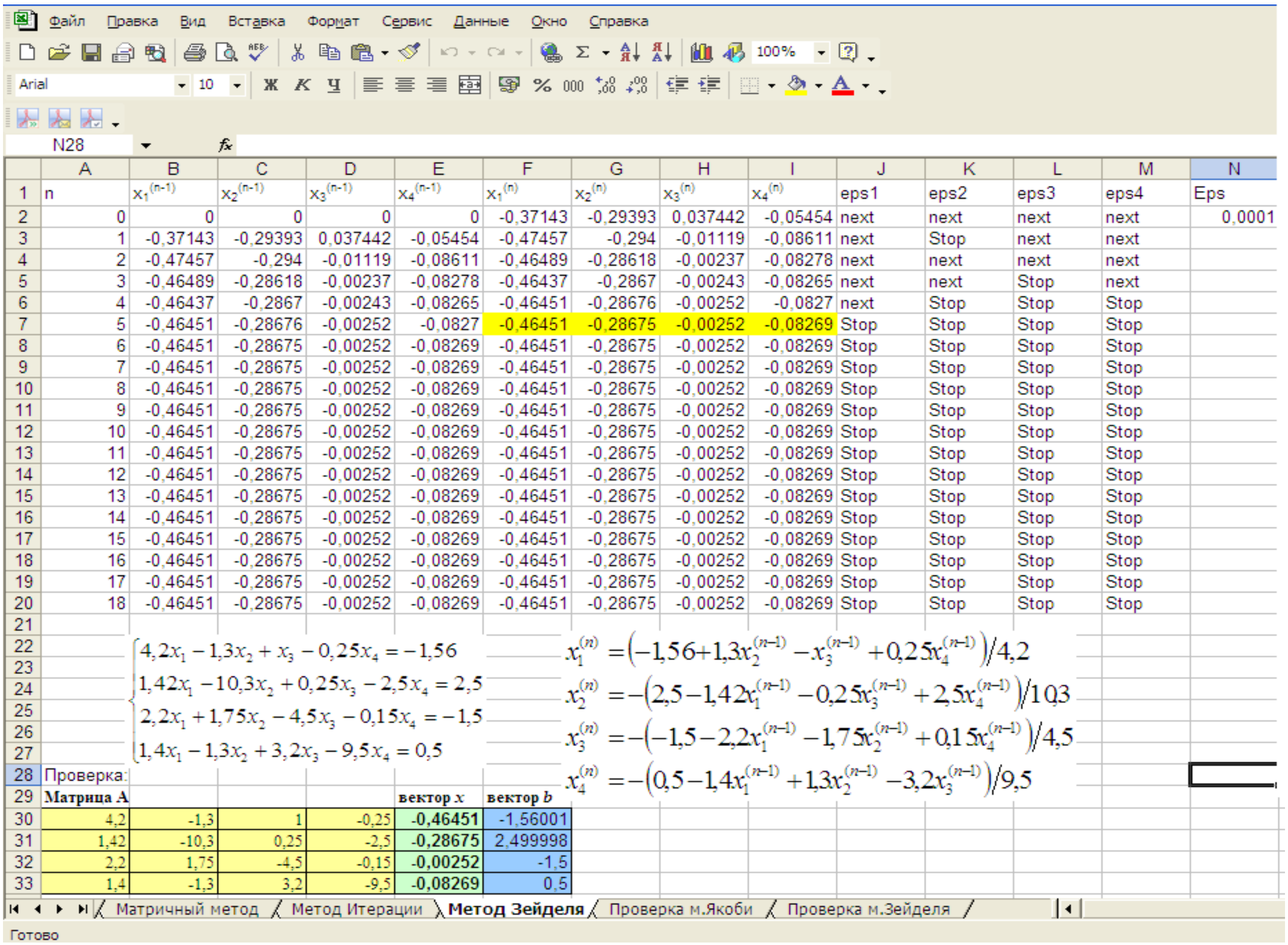
$$x = \begin{pmatrix} -0.4645 \\ -0.2867 \\ -0.0025 \\ -.0.0827 \end{pmatrix}$$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$,получаем на пятом шаге.

3) Проанализировать полученные результаты нахождения корней СЛАУ методом постой итерации и методом Зейделя.

Для этого задания нам необходимо провести вычисления с разными значениями ε (Например, $\varepsilon=10^{-1}$, $\varepsilon=10^{-2}$, $\varepsilon=10^{-3}$, $\varepsilon=10^{-5}$). Занесите значения в таблицу и сделайте вывод: при использовании какого метода быстрее получаем ответ?

Таблица 1.

ε	№ итерации М.Якоби (из практического занятия №5)	№ итерации М.Зейделя
0,1		
0,01		
0,001	9	5
0,0001		
0,00001		



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	n	$x_1^{(n-1)}$	$x_2^{(n-1)}$	$x_3^{(n-1)}$	$x_4^{(n-1)}$	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$	$x_4^{(n)}$	eps1	eps2	eps3	eps4	Eps
2	0	0	0	0	0	-0,37143	-0,29393	0,037442	-0,05454	next	next	next	next	0,0001
3	1	-0,37143	-0,29393	0,037442	-0,05454	-0,47457	-0,294	-0,01119	-0,08611	next	Stop	next	next	
4	2	-0,47457	-0,294	-0,01119	-0,08611	-0,46489	-0,28618	-0,00237	-0,08278	next	next	next	next	
5	3	-0,46489	-0,28618	-0,00237	-0,08278	-0,46437	-0,2867	-0,00243	-0,08265	next	next	Stop	next	
6	4	-0,46437	-0,2867	-0,00243	-0,08265	-0,46451	-0,28676	-0,00252	-0,0827	next	Stop	Stop	Stop	
7	5	-0,46451	-0,28676	-0,00252	-0,0827	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	
8	6	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	
9	7	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	
10	8	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	
11	9	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	
12	10	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	
13	11	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	
14	12	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	
15	13	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	
16	14	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	
17	15	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	
18	16	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	
19	17	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	
20	18	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	-0,46451	-0,28675	-0,00252	-0,08269	Stop	Stop	Stop	Stop	

$$\begin{cases} 4,2x_1 - 1,3x_2 + x_3 - 0,25x_4 = -1,56 \\ 1,42x_1 - 10,3x_2 + 0,25x_3 - 2,5x_4 = 2,5 \\ 2,2x_1 + 1,75x_2 - 4,5x_3 - 0,15x_4 = -1,5 \\ 1,4x_1 - 1,3x_2 + 3,2x_3 - 9,5x_4 = 0,5 \end{cases}$$

$$x_1^{(n)} = \left(-1,56 + 1,3x_2^{(n-1)} - x_3^{(n-1)} + 0,25x_4^{(n-1)}\right)/4,2$$
$$x_2^{(n)} = -\left(2,5 - 1,42x_1^{(n-1)} - 0,25x_3^{(n-1)} + 2,5x_4^{(n-1)}\right)/10,3$$
$$x_3^{(n)} = -\left(-1,5 - 2,2x_1^{(n-1)} - 1,75x_2^{(n-1)} + 0,15x_4^{(n-1)}\right)/4,5$$
$$x_4^{(n)} = -\left(0,5 - 1,4x_1^{(n-1)} + 1,3x_2^{(n-1)} - 3,2x_3^{(n-1)}\right)/9,5$$

Проверка:

Матрица A				вектор x	вектор b
4,2	-1,3	1	-0,25	-0,46451	-1,56001
1,42	-10,3	0,25	-2,5	-0,28675	2,499998
2,2	1,75	-4,5	-0,15	-0,00252	-1,5
1,4	-1,3	3,2	-9,5	-0,08269	0,5

Рис.3

Индивидуальные задания:

Задание №1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Зейделя, с точностью 10^{-4}.

1 в. $\begin{cases} 15x_1+2x_2+3x_3+x_4=15 \\ x_1-15x_2+2x_3+3x_4=14 \\ x_1-4x_2+15x_3+4x_4=16 \\ 2x_1+8x_2+x_3-15x_4=11 \end{cases}$

2 в. $\begin{cases} 30x_1-2x_2+5x_3+7x_4=5 \\ 2x_1+30x_2+10x_3+x_4=-5 \\ x_1+4x_2+30x_3+3x_4=-2 \\ 2x_1+8x_2+6x_3+30x_4=-11 \end{cases}$

3 в. $\begin{cases} 20x_1+3x_2+4x_3+8x_4=60 \\ 7x_1+20x_2-3x_3+5x_4=25 \\ -3x_1+x_2+20x_3-x_4=-6 \\ -x_1-x_2+4x_3+20x_4=24 \end{cases}$

4 в. $\begin{cases} 20x_1-x_2+5x_3+7x_4=5 \\ 2x_1+20x_2+10x_3+x_4=-5 \\ x_1+4x_2+20x_3+3x_4=-2 \\ 2x_1+8x_2+6x_3+20x_4=-11 \end{cases}$

5 в. $\begin{cases} 15x_1+3x_2+4x_3+8x_4=60 \\ 7x_1+15x_2-3x_3+5x_4=25 \\ -3x_1+x_2+15x_3-x_4=-6 \\ -2x_1+x_2+3x_3+15x_4=11 \end{cases}$

6 в. $\begin{cases} 15x_1+2x_2+3x_3+x_4=15 \\ x_1-15x_2+2x_3+3x_4=14 \\ x_1-4x_2+15x_3+4x_4=16 \\ 2x_1+8x_2+x_3-15x_4=11 \end{cases}$

7 в. $\begin{cases} 10x_1-x_2+2x_3+3x_4=18 \\ x_1+10x_2-2x_3+x_4=-14 \\ -x_1+4x_2+10x_3+2x_4=-24 \\ 3x_1+2x_2+x_3+10x_4=8 \end{cases}$

8 в. $\begin{cases} 15x_1-3x_2+2x_3+x_4=-3 \\ -2x_1+15x_2+4x_3+5x_4=12 \\ x_1-4x_2+15x_3-7x_4=-30 \\ -x_1-2x_2+7x_3-15x_4=8 \end{cases}$

9 в. $\begin{cases} 20x_1-5x_2+6x_3+x_4=0 \\ -3x_1+20x_2-7x_3+5x_4=-25 \\ x_1-x_2+20x_3+3x_4=-6 \\ -4x_1+2x_2+5x_3+20x_4=25 \end{cases}$

10 в. $\begin{cases} 30x_1+4x_2+3x_3+x_4=3 \\ 10x_1+30x_2-20x_3+4x_4=6 \\ -12x_1+x_2+30x_3+6x_4=-1 \\ 5x_1+7x_2+8x_3+30x_4=19 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1. В чём отличие метода Зейделя от метода простой итерации?
2. Перечислите прямые и итерационные методы для решения СЛАУ? Какие из них являются точными, а какие приближенными?
3. Суть метода итерации Зейделя.
4. Какой из итерационных методов сходится быстрее? Почему?
5. Назовите критерий окончания метода Зейделя.