

Практическое занятие №14

Решений обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты.

Цель: получить умения приближенно находить решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге-Кутты.

Норма времени: 2 часа

Обеспечивающие средства: компьютер, калькулятор, тетрадь.

Порядок выполнения работы

Метод Рунге-Кутта

Если к методу Эйлера подойти другим путем, не используя геометрических построений, то необходимо рассматривать производные функции $f(x,y)$ и раскладывать эту функцию в степенной ряд. Но нахождение производных не является стандартной задачей, применяемой при решении математических задач систем программирования.

Альтернативный путь открывает метод Рунге-Кутты, названный по имени его создателей.

Основная идея метода Рунге-Кутты такова: вместо использования в формулах частных производных функции $f(x,y)$ использовать лишь саму эту функцию, но на каждом шаге вычислять ее значение в нескольких точках.

На практике соблюдается некоторый компромисс между высоким порядком формул и их громоздкостью с одной стороны, и объемом вычислений по ним для достижения заданной точности, с другой. Запишем самую распространяемую формулу Рунге-Кутты четвертого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4), \quad (5)$$

$$\text{где, } r_1 = hf(x_i, y_i),$$

$$r_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{r_1}{2}\right), \quad (6)$$

$$r_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{r_2}{2}\right),$$

$$r_4 = hf(x_i + h, y_i + r_3).$$

Общий недостаток методов Рунге-Кутты – отсутствие простых способов оценки погрешности метода. Погрешность на одном шаге оценить сравнительно не трудно, гораздо труднее оценить накопление погрешностей на протяжении многих шагов. Широко используемый на практике для этих методов способ контроля точности – *двойной счет*: вычисляем решение дифференциального уравнения с шагом h и $h/2$, а потом сравниваем полученные результаты.

Пример: Решить дифференциальное уравнение $y' = y(1-x)$ на отрезке $[0;0.5]$ с начальным условием $y(0)=1$ и шагом $h=0.05$.

Решение: Сначала решим это уравнение аналитически:

$y' = y(1-x)$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = y(1-x),$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1-x)dx,$$

$$\ln y = x - \frac{x^2}{2} + C,$$

Применим начальное условие $y(0) = 1$, получим:

$$\ln 1 = 0 - 0 + C, \quad C = 0,$$

Таким образом, частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию:

$$y = e^{x - \frac{x^2}{2}}.$$

Пользуясь этой формулой, можно получить таблицу «точного» решение уравнения.

Найдем приближенное решение дифференциальное уравнение по методу Рунге-Кутта. Проведем последовательные вычисления по формулам (5), (6):

Имеем: $f(x,y)=y(1-x)$, $x_0=0$, $y_0=1$, $h=0.05$. Тогда

$$r_1 = hf(x_0, y_0) = h \cdot y_0(1 - x_0) = 0.05 \cdot 1 \cdot (1 - 0) = 0.05,$$

$$\begin{aligned} r_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{r_1}{2}\right) = hf\left(0 + \frac{0.05}{2}; 1 + \frac{0.05}{2}\right) = \\ &= hf(0.025; 1.025) = 0.05 \cdot 0.025 \cdot (1 - 0.025) = 0.04997, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{r_2}{2}\right) = hf\left(0.025; 1 + \frac{0.04997}{2}\right) = \\ &= hf(0.025; 1.025) = 0.05 \cdot 0.025 \cdot (1 - 0.025) = 0.04997, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + r_3) = hf(0 + 0.05; 1 + 0.04997) = \\ &= hf(0.05; 1.04997) = 0.05 \cdot 1.04997 \cdot (1 - 0.05) = 0.04987. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения в формулу (5):

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4) = 1 + \frac{1}{6}(0.05 + 2 \cdot 0.04997 + 2 \cdot 0.04997 + 0.04987) = 1.04996$$

Поскольку вычисления достаточно громоздки и трудоемки, то численные решения заданного уравнения можно найти с помощью программы на компьютере.

Для сравнения результатов построим таблицу, в которой укажем численные решения, полученные по методу Эйлера (взять данные из Практического занятия №13), методу Рунге-Кутта и «точное решение».

X	Y		
	метод Эйлера	метод Рунге-Кутта	«точное решение»
0,00	1	1	1
0,05	1,05	1,0499	1,0499
0,10	1,0999	1,0997	1,0997
0,15	1,1494	1,1488	1,1488
0,20	1,1982	1,1972	1,1972
0,25	1,2462	1,2445	1,2445
0,30	1,2929	1,2905	1,2905
0,35	1,3381	1,3348	1,3348
0,40	1,3816	1,3771	1,3771
0,45	1,4231	1,4173	1,4173
0,50	1,4622	1,4550	1,4550

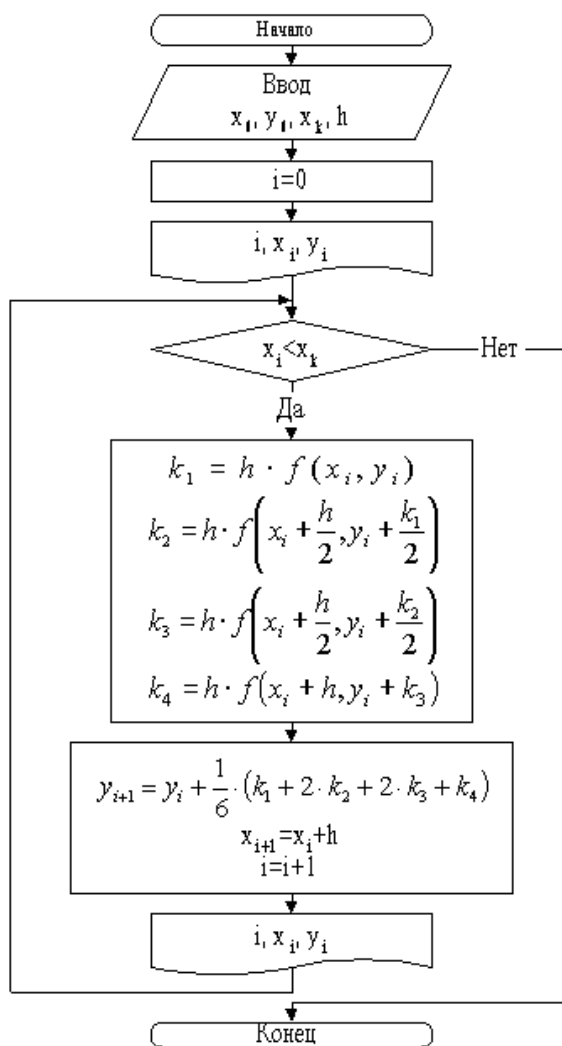
Из таблицы видно, что результаты, получения по методу Рунге-Кутта практически совпадают с «точным» решением уравнения, в отличие от соответствующих значений, полученных по методу Эйлера.

Задания практического занятия

Задание 1

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ на отрезке $[a;b]$ при заданном начальном условии $y(a)=y_0$ методом Рунге-Кутта с помощью программы для компьютера с шагом h и с шагом $h/2$.

На основе результатов двойного счета сделать вывод о точности полученного решения.



Блок-схема метода Рунге-Кутты решения дифференциальных уравнений

Задание 2

Свести результаты вычислений в одну таблицу и сопоставить точность полученных значений функции. Пользуясь таблицей, сделать ручную прикидку графика интегральной кривой на бумаге.

Таблица 1

Вариант	$f(x)$	a	b	y_0	h
1	$(x^2 + y^2) - 2xyy' = 0$	3	5	1	0.2
2	$y' = \frac{y}{x} - 1$	2.6	4.6	1	0.2
3	$yy' + (x - 2y) = 0$	0	2	0	0.2
4	$(x - y)y - x^2y' = 0$	1	3	1	0.2

5	$xy' - y = y^3$	0	2	0	0.2
6	$xyy' = 1 - x^2$	1	3	1	0.2
7	$yy' + x = 1$	0.5	2.5	0	0.2
8	$y - xy' = 1 + x^2 y'$	0.2	2.2	1	0.2
9	$xy + (x+1)y' = 0$	1	3	2	0.2
10	$2x^2 yy' + y^2 = 2$	3	5	1	0.2
11	$(xy - x^2)y' = y^2$	0.2	2.4	1	0.2
12	$y - xy' = x + yy'$	1	3	0	0.2
13	$y + 2 = (2x + y - 4)y'$	2.6	4,6	2	0.2
14	$(3x - 1)y' + y^2 = 0$	1.5	3,5	0	0.2
15	$xy' + 2y = 2xyy'$	2.1	4.1	0	0.2

Контрольные вопросы:

1. В чем основная идея метода Рунге-Кутты?
2. В чем отличие одношаговых методов Эйлера и Рунге-Кутты?