Практическое занятие №13
Решений обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера.

Цель: получить умения приближенно находить решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера.
Норма времени: 2 часа
Обеспечивающие средства: компьютер, калькулятор, тетрадь.

Порядок выполнения работы
Постановка задач

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y' = f(x,y) \quad \textbf{(1)}$$

Эта задача известна, как **задача Коши**: *найти решение уравнения (1) в виде функции y(x), удовлетворяющей начальному условию*

$$y(x_0) = y_0. \quad \textbf{(2)}$$

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую y=y(x), проходящую через заданную точку M_0 (x_0,y_0), при выполнении равенства (1).

Существует несколько классов дифференциальных уравнений 1-го порядка, для которых решение может быть найдено аналитически. Но даже для таких уравнений решение не всегда удается довести до вида y=y(x). Многие же дифференциальные уравнения, к которым приводят математические модели реальных процессов, не могут быть решены аналитически. По этой причине разработаны многочисленные методы приближенного решения дифференциальных уравнений.

Эти методы подразделяются на 3 основные группы:

1) *аналитические методы*, применения которых дает приближенное решение дифференциальных уравнений в виде формулы;
2) *графические методы*, дающие приближенное решение в виде графика;
3) *численные методы*, когда искомая функция получается в виде таблицы.

Метод Эйлера

В основе метода ломанных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения. Однако этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Пусть дано уравнение (1) с начальным условием (2), т.е. поставлена раздача Коши.

Вначале найдем простейшим способом приближенное значение решения в некоторой точке $x_1 = x_0 + h$, где h – достаточно малый шаг.

Заметим, что уравнение (1) совместно с начальным условием (2) задают направление касательной к искомой интегральной кривой в точке $M_0(x_0,y_0)$. Двигаясь вдоль этой касательной, получим приближенное значение решения в точке x_1:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) \qquad \textbf{(3)}$$

Аналогично, найдем приближенное значение решения в точке $x_2 = x_1 + h$, и т.д.

Продолжая эту идею, построим систему равностоящих точек $x_i = x_0 + ih$, i=0,..,n.

Получение таблицы значений искомой функции y(x) по методу Эйлера заключается в циклическом применении пары формул:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= hf(x_i; y_i); \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i \end{aligned} \qquad \textbf{(4)}$$

Геометрическая иллюстрация метода Эйлера:

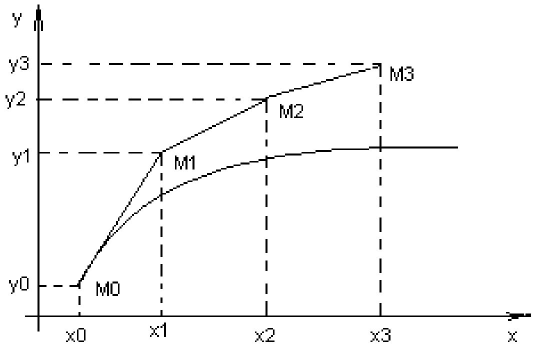


Рис 5.1 Построение ломаной Эйлера

Вместо кривой в реальности получается совокупность прямых – ломаная Эйлера.

Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, в которых решение получается от одного узла к другому, называются *пошаговыми*.

Метод Эйлера – простейший пошаговый метод.

Отметим, что оценка погрешности метода при таком элементарном рассмотрении невозможна даже на первом шаге. Кроме того, особенностью любого пошагового метода является то, что, начиная со второго шага, исходное значение y_i в формуле (4) само является приближенным, т.е. погрешность на каждом шаге систематически возрастает.

Наиболее используемым методом оценки точности, как метода Эйлера, так и других пошаговых методов приближенного численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений является *способ двойного прохождения заданного отрезка с шагом h и с шагом h/2.* Совпадение соответствующих десятичных знаков в полученных двумя способами результатах дает основание считать их верными.

Пример: Решить методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = \cos y + 3x$ с начальным условием y(0) = 1,3 на отрезке [0;1] применив h=0,2.

Решение: Имеем $f(x, y) = \cos y + 3x$.

Составим таблицу значений функции f(x,y) с шагом h и h/2.

x	y_i *(h=0.2)*	y_i *(h=0.1)*
0	1.3	1.3
0.1		1.33
0.2	1.35	1.38
0.3		1.46
0.4	1.52	1.56
0.5		1.68
0.6	1.77	1.82
0.7		1.98
0.8	2.09	2.15
0.9		2.33
1	2.47	2.53

При составлении таблицы проводились следующие вычисления:

Если h=0,2:

1) x_0=0, y_0=1,3 из начального условия;
2) x_1=0,1,

$$\Delta y_0 = h(\cos y_0 + 3x_0) = 0.2(\cos 1.3 + 3\cdot 0) = 0.054;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1.3 + 0.054 = 1.35$$

3) x_2=0,2,

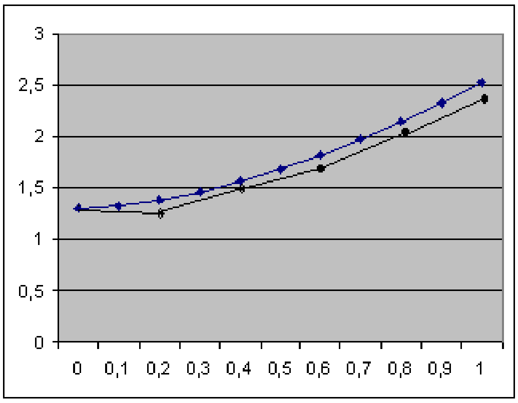
$$\Delta y_1 = h(\cos y_1 + 3x_1) = 0.2(\cos 1.35 + 3\cdot 0,,2) = 0.16;$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1.35 + 0.16 = 1.52$$

И т.д.

Аналогичные вычисления проводились и для h=0,1.

Таким образом, приближенное решение уравнения получаем в виде таблицы. Построим ломаную Эйлера для h=0,2 и h=0,1 в одной системе координат.

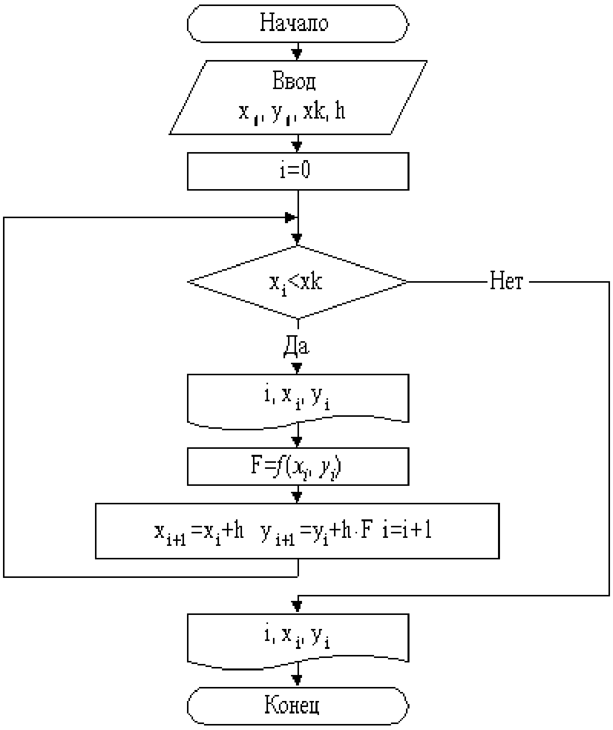


Задание 1.

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения y'=f(x,y) на отрезке [a;b] при заданном начальном условии y(a)=y_0 и шаге интегрирования h методом Эйлера:

а) с применением «ручных» вычислений с шагом 2h.

б) с помощью программы для компьютера с шагом h.



Блок-схема метода Эйлера решения дифференциальных уравнений

Задание 2
Найти точное решение задачи Коши.

Таблица 1

Вариант	*f(x)*	*a*	*b*	y_0	*h*
1	$(x^2+y^2)-2xyy'=0$	3	5	1	0.2
2	$y'=\frac{y}{x}-1$	2.6	4.6	1	0.2
3	$yy'+(x-2y)=0$	0	2	0	0.2
4	$(x-y)y-x^2y'=0$	1	3	1	0.2
5	$xy'-y=y^3$	0	2	0	0.2
6	$xyy'=1-x^2$	1	3	1	0.2
7	$yy'+x=1$	0.5	2.5	0	0.2
8	$y-xy'=1+x^2y'$	0.2	2.2	1	0.2
9	$xy+(x+1)y'=0$	1	3	2	0.2
10	$2x^2yy'+y^2=2$	3	5	1	0.2
11	$(xy-x^2)y'=y^2$	0.2	2.4	1	0.2
12	$y-xy'=x+yy'$	1	3	0	0.2
13	$y+2=(2x+y-4)y'$	2.6	4,6	2	0.2
14	$(3x-1)y'+y^2=0$	1.5	3,5	0	0.2
15	$xy'+2y=2xyy'$	2.1	4.1	0	0.2

Контрольные вопросы:

1. Что является решением дифференциального уравнения?
2. На какие группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?
3. В какой форме получается приближенное решение дифференциального уравнения по методу Эйлера?