

Практическое занятие №10, 11, 12

Вычисление интегралов при помощи формул Ньютона-Котеса: разработка алгоритма и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата.

Цель: закрепить умения приближенно вычислять интегралы при помощи формул Ньютона-Котеса (формула прямоугольников, формула трапеций, формула парабол (Симпсона)).

Норма времени: 6 часов

Обеспечивающие средства: компьютер, калькулятор, тетрадь.

Порядок выполнения работы

1. Подстановка задачи численного интеграла

При вычислении определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx ,$$

где $f(x)$ - функция непрерывная на отрезке $[a,b]$ используется формула Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Однако бывают случаи, когда первообразную $F(x)$ нельзя найти, или не всегда удастся довести вычисления до числового значения. Иногда подынтегральная функция может быть задана таблично или графиком, поэтому формула (4.1) не исчерпывает практических приемов вычисления интегралов.

На практике часто применяют различные методы приближенного (численного) интегрирования.

Определение: Формулы, используемые для приближенного вычисления интегралов, называют *квадратурными формулами*.

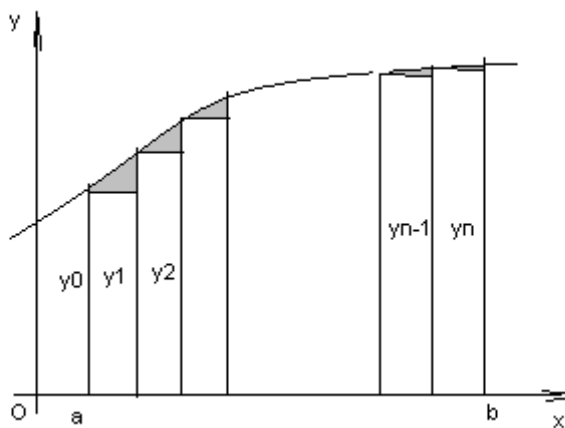
Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция $f(x)$ заменяется на отрезке $[a;b]$ интерполяционным многочленом Лагранжа $Ln(x)$, и тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b Ln(x)dx . \quad (2)$$

Подобный подход удобен тем, что он приводит к алгоритмам, легко реализуемым на компьютере, и позволяющим получать результат с точностью, достаточной для широкого круга практических приложений.

2. Метод прямоугольников

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, отрезок $[a;b]$ разбивают на n криволинейную трапецию, заменяют прямоугольником с основанием $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, и высотой $y_0, y_1, \dots, y_n$, соответственно.

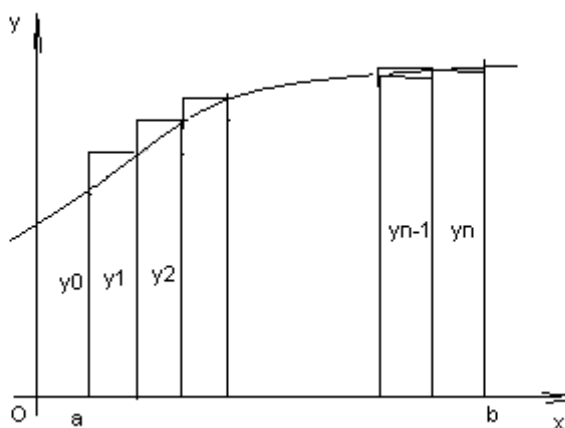


Данный подход к решению задачи дает площадь криволинейной трапеции, т.е. значение определенного интеграла с недостатком

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (3)$$

Формула (3) называется *формулой прямоугольников с недостатком*.

Аналогично можно получить формулу для вычисления определенного интеграла с избытком.



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \quad (4)$$

Формула (4) называется *формулой прямоугольников с избытком*.

где значение

$$y_k = f(a + k \cdot \Delta x), \quad k = \overline{0, n}. \quad (5)$$

Пример: Вычислить по формуле прямоугольников интеграл

$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx \quad (n=5).$$

Решение:

Имеем $a=0$, $b=\pi/4$, $f(x)=\cos x$.

Тогда $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/4 - 0}{5} = \frac{\pi}{20} \approx 0,157$

Вычислим значение функции по формуле (5):

$$y_0 = f(a + 0 \cdot \Delta x) = \cos(0) = 1,$$

$$y_1 = f(a + 1 \cdot \Delta x) = \cos(0 + \frac{\pi}{20}) = \cos \frac{\pi}{20} \approx \cos 9^\circ \approx 0,987,$$

$$y_2 = \cos(0 + 2 \cdot \frac{\pi}{20}) = \cos \frac{\pi}{10} = \cos 18^\circ \approx 0,951,$$

$$y_3 = \cos(0 + 3 \cdot \frac{\pi}{20}) = \cos \frac{3\pi}{20} = \cos 27^\circ \approx 0,891,$$

$$y_4 = \cos(0 + 4 \cdot \frac{\pi}{20}) = \cos \frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ \approx 0,809.$$

Применяя формулу прямоугольника с недостатком (2) получим

$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx = 0,157(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 0,157 \cdot (1 + 0,987 + 0,951 + 0,891 + 0,809) = 0,728$$

Вычислим данный интеграл по формуле Ньютона - Лейбница и сравним результаты:

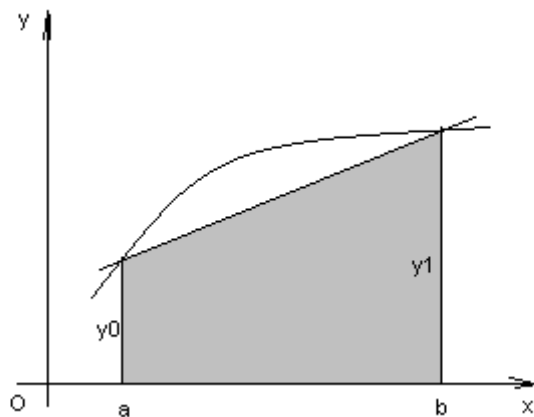
$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/4} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Относительная погрешность вычисления:

$$\Delta = \frac{(I_{\text{точн}} - I_{\text{прибл}})}{I_{\text{точн}}} \approx 0,029.$$

3. Метод трапеций

Геометрический смысл этого метода практического вычисления определенного интеграла состоит в том, что нахождение площади криволинейной трапеции заменяется нахождением площади приблизительно равновеликой прямолинейной трапеции.



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} (b - a) \quad (6)$$

Для повышения точности результата разобьём фигуру на n частей, а затем суммируем площади получившихся трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right), \text{ или} \quad (7)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

где $y_k = f(x_k) = f(a + k\Delta x)$, $k = \overline{0, n}$.

Формула (7) называется *формулой трапеций*.

Пример: По формуле трапеции вычислить интеграл

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \quad (n=5).$$

Решение: Имеем $a=0$, $b=5$, $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{5} = 1$.

Вычислим промежуточные значения функции в узлах:

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{\sqrt{0+4}} = \frac{1}{2} = 0,5, \quad y_1 = y(1) = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = 0,447,$$

$$y_2 = y(2) = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,409, \quad y_3 = y(3) = \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0,377,$$

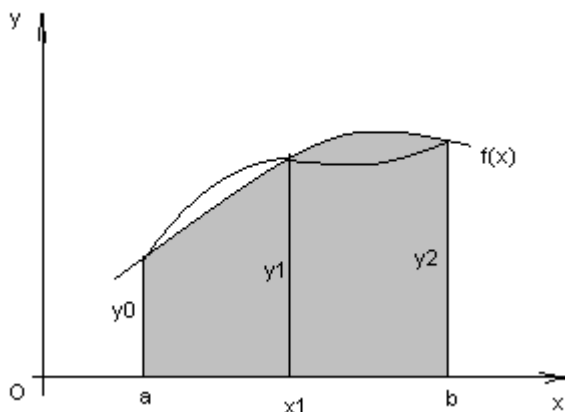
$$y_4 = y(4) = \frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0,353, \quad y_5 = y(5) = \frac{1}{\sqrt{9}} \approx 0,333.$$

Тогда по формуле трапеций (7) имеем:

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \approx 1 \left(\frac{0,5}{2} + 0,447 + 0,409 + 0,377 + 0,353 + \frac{0,3}{2} \right) \approx 2,002.$$

4. Метод парабол

Замена подынтегральной функции $f(x)$ параболой, проходящей через точки $M_i(x_i; y_i)$, ($i=0,1,2$) позволяет получать более точное значение определенного интеграла.



Если считать, что n - четное ($n=2m$), то получим:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{3} \left(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + \dots + 2y_{2m-1} \right), \quad (8)$$

где $h = \frac{b-a}{n}$.

Формула (8) называется *формулой парабол или формулой Симпсона*.

Для оценки погрешности формулы Симпсона применяется формула

$$\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \cdot \frac{|b-a|h^4}{180} \leq \varepsilon, \quad (9)$$

Как следует из оценки, формула Симпсона, оказывается точной для многочленов до 3-ей степени включительно. Так как для этих случаев производная 4-го порядка равна 0.

Формула Симпсона обладает повышенной точностью по сравнению с формулой трапеций, это обозначает, что для достижения той же точности, что и в формуле трапеций, в ней можно брать меньшее число n - отрезков разбиения. Последнее обстоятельство весьма важно для вычислений. Поскольку основное время затрачивается на нахождение значений функции в узлах. Укажем простой практический прием, позволяющий прогнозировать требуемое число отрезков разбиения по заданной точности ε .

$$h \leq \sqrt{\frac{180\varepsilon}{|b-a|\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|}}, \quad (10)$$

Пример: Вычислить интеграл по формуле парабол

$$\int_0^1 x^2 \sin x dx, \quad (n=10).$$

Решение: Значения подынтегральной функции в узловых точках запишем в таблицу:

x_i	y_i
0	0
0,1	0,0019966
0,2	0,0079467
0,3	0,0531936
0,4	0,0623068
0,5	0,2397124
0,6	0,2032711
0,7	0,6313333
0,8	0,4591078
0,9	1,2689896
1	0,841478

Подставим найденные значения в формулу Симпсона, учитывая, что $h=0,1$:

$$\int_0^1 x^2 \sin x dx \approx \frac{2 \cdot 0,1}{3} \left(\frac{0 + 0,841478}{2} + 2 \cdot 0,0019966 + 0,0079467 + 2 \cdot 0,0531936 + 0,0623068 + \right. \\ \left. + 2 \cdot 0,2397124 + 0,2032711 + 2 \cdot 0,6313333 + 0,4591078 + 2 \cdot 1,2689896 \right) \approx 0,2232395$$

В данном случае легко вычислить «точное» значение этого интеграла, пользуясь формулой Ньютона - Лейбница

$$\int_0^1 x^2 \sin x dx = 2 \sin 1 + \cos 1 - 2 = 0,223244275.$$

Как видим, результат, полученный с помощью приближенной формулы парабол, дает высокую точность.

Задания практического занятия

Задание 1.

Вычислить интеграл от заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ при делении отрезка на 10 равных частей тремя способами:

- 1) по формуле прямоугольников;
- 2) по формуле трапеций;

3) по формуле Симпсона;
Сравнить точность полученных результатов.

Задание 2.

С помощью программ на компьютере вычислить значение интеграла заданной функции на отрезке $[a;b]$:

- 1) по формуле прямоугольников;
- 2) по формуле трапеций;
- 3) по формуле Симпсона.

Задание 3.

Вычислить интеграл вручную по формуле Ньютона-Лейбница

Сравнить полученные результаты с результатами, полученными при выполнении задания 1 и 2.

Таблица 1

Вариант	$f(x)$	a	b
1	$0,5 + x \lg x$	1	2
2	$(x+1,9)\sin(x/3)$	1	2
3	$\frac{1}{x} \ln(x+2)$	2	3
4	$(2x+0,6)\cos(x/2)$	1	2
5	$2,6x^2 \ln x$	1.2	2.2
6	$(x^2+1)\sin(x-0,5)$	0.5	1.5
7	$x^2 \cos(x/4)$	2	3
8	$\frac{\sin(0,2x-3)}{x^2+1}$	3	4
9	$3x + \ln x$	1	2
10	$4xe^{x^2}$	-1	0
11	$3x^2 + tgx$	-0.5	0.5
12	$\frac{3x^2 + \sin x}{x^2}$	0,1	1,1
13	$3xe^{\cos x}$	0.2	1.2
14	$x^2 tg \frac{x}{2}$	1.5	2.5
15	$\sqrt{x}e^{-x}$	0.1	1.1

Контрольные вопросы:

1. Почему формула Ньютона-Котеса может оказаться непригодной для реального вычисления определенного интеграла?
2. Как связаны задачи численного интегрирования и интерполирования?
3. Чем объясняется название формулы прямоугольников?
4. Чем объясняется название формулы трапеций?
5. В чем выражаются преимущества формулы Симпсона перед формулой трапеций?