Практическое занятие №4
Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: Получение практических навыков решения систем линейных уравнений методом Гаусса; научиться программировать метод Гаусса для решения систем линейных уравнений на языке программирования C#.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: компьютеры, программа Visual Studio.

Порядок выполнения работы
Теоретические сведения

Метод Гаусса. Он основан на приведении матрицы системы к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы. Сначала с помощью первого уравнения исключается x_1 из всех последующих уравнений системы. Затем с помощью второго уравнения исключается x_2 из третьего и всех последующих уравнений. Этот процесс, называемый *прямым ходом метода Гаусса*.

Обратный ход метода Гаусса состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных: решая последнее уравнение, находим единственное в этом уравнении неизвестное x_n.

Рассмотрим применение метода Гаусса для системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Для исключения x_1 из второго уравнения прибавим к нему первое, умноженное на $-a_{21}/a_{11}$. Затем, умножив первое уравнение на $-a_{31}/a_{11}$ и прибавив результат к третьему уравнению, также исключим из него x_1. Получим равносильную (2) систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases} \qquad (2)$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}, \qquad i, j = 2,3,$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1, \qquad i = 2,3.$$

Теперь из третьего уравнения системы (4.2) нужно исключить x_2. Для этого умножим второе уравнение на $-a'_{32}/a'_{22}$ и прибавим результат к третьему. Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases} \tag{3}$$

$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{23}, \qquad b''_3 = b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2.$$

Матрица системы (3) имеет треугольный вид. На этом заканчивается прямой ход метода Гаусса.

Заметим, что в процессе исключения неизвестных приходится выполнять операции деления на коэффициенты a_{11}, a'_{22} и т. д. Поэтому они должны быть отличны от нуля. В противном случае необходимо соответственным образом переставить уравнения системы.

Обратный ход начинается с решения третьего уравнения системы (3):

$$x_3 = b''_3 / a''_{33}$$

Используя это значение, можно найти x_2 из второго уравнения, а затем x_1 из первого:

$$x_2 = \frac{1}{a'_{22}}\left(b'_2 - a'_{23}x_3\right),$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right).$$

Аналогично строится вычислительный алгоритм для линейной системы с произвольным числом уравнений. На рис. 1 приведен алгоритм решения методом Гаусса системы *n* линейных уравнений вида (1).

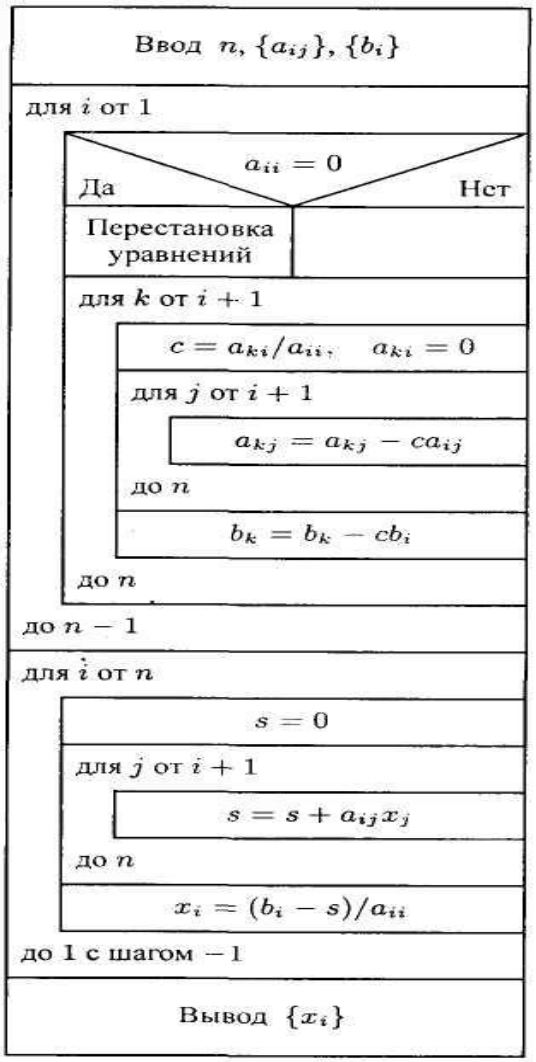

Рис. 1. Метод Гаусса

Поясним смысл индексов: i — номер неизвестного, которое исключается из оставшихся $n-i$ уравнений при прямом ходе (а также номер того уравнения, с помощью которого исключается x_i) и номер неизвестного, которое определяется из i-го уравнения при обратном ходе; *к* — номер уравнения, из которого исключается неизвестное x_i при прямом ходе; *j* — номер столбца при прямом ходе и номер уже найденного неизвестного при обратном ходе.

Задание для решения:

С использованием Visual Studio найти решение системы линейных уравнений. Для решения системы использовать метод Гаусса.

1	$\begin{cases} -2{,}2\cdot x_1+12{,}1\cdot x_2+4{,}3\cdot x_3 \qquad -4{,}3\cdot x_5=26{,}3 \\ -1{,}2\cdot x_1+4{,}2\cdot x_2-2{,}2\cdot x_3-10{,}8x_4 \qquad =-42{,}6 \\ 3{,}1\cdot x_1+2{,}2\cdot x_2+13{,}4\cdot x_3-4{,}1\cdot x_4-3{,}3\cdot x_5=24{,}7 \\ 2{,}4\cdot x_1+3{,}2\cdot x_2-1{,}2\cdot x_3-1{,}4\cdot x_4+9{,}2\cdot x_5=18 \\ 10{,}2\cdot x_1+2{,}1\cdot x_2-3{,}2\cdot x_3-2{,}2\cdot x_4 \qquad =-4 \end{cases}$
2	$\begin{cases} -1{,}5\cdot x_1+6{,}3\cdot x_2-1{,}8\cdot x_3+12{,}4\cdot x_4 \qquad =-62{,}9 \\ 9{,}4\cdot x_1-2{,}4\cdot x_2+2{,}9\cdot x_3 \qquad -4{,}3\cdot x_5=115{,}5 \\ -3{,}4\cdot x_2+10{,}9\cdot x_3-3{,}7\cdot x_4+4{,}2\cdot x_5=40{,}2 \\ 3{,}7\cdot x_1-1{,}4\cdot x_2+0{,}1\cdot x_3+2{,}9\cdot x_4-9{,}7\cdot x_5=76{,}9 \\ 2{,}3\cdot x_1+15{,}2\cdot x_2 \qquad -4{,}3\cdot x_4+2\cdot x_5=-28{,}6 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3\cdot x_1-1{,}4\cdot x_2-8{,}3\cdot x_3 \qquad +4{,}3\cdot x_5=62{,}1 \\ 5{,}4\cdot x_1+2{,}1\cdot x_2+0{,}9\cdot x_3 \qquad -16{,}4\cdot x_5=-98{,}9 \\ 10{,}3\cdot x_1+2{,}9\cdot x_2+3{,}4\cdot x_3-0{,}3\cdot x_4-6{,}3\cdot x_5=-12{,}6 \\ 9\cdot x_1+2{,}1\cdot x_2+2{,}6\cdot x_3-9{,}9\cdot x_4+2{,}1\cdot x_5=78 \\ 2{,}1\cdot x_1-11{,}3\cdot x_2 \qquad -4{,}7\cdot x_4+2{,}1\cdot x_5=98{,}6 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2{,}1\cdot x_1-8{,}3\cdot x_2 \qquad -2{,}4\cdot x_4+3{,}7\cdot x_5=44{,}3 \\ 8{,}7\cdot x_1-2{,}7\cdot x_2-5{,}4\cdot x_3+1{,}2\cdot x_4+0{,}2\cdot x_5=64{,}7 \\ 2{,}3\cdot x_1-4{,}1\cdot x_2+0{,}3\cdot x_3+2{,}1\cdot x_4-11{,}4\cdot x_5=-28{,}9 \\ 0{,}7\cdot x_2-7{,}4\cdot x_3+3{,}2\cdot x_4 \qquad =17{,}6 \\ -3{,}2\cdot x_1 \qquad -1{,}9\cdot x_3+10{,}3\cdot x_4-5{,}4\cdot x_5=-42{,}2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} -6{,}2\cdot x_1 \qquad -2{,}4\cdot x_3+1{,}9\cdot x_4-10{,}7\cdot x_5=45{,}8 \\ -1{,}7\cdot x_1-0{,}8\cdot x_2+12{,}1\cdot x_3-1{,}4\cdot x_4-2{,}3\cdot x_5=10{,}3 \\ -{,}37\cdot x_1+10{,}8\cdot x_2-3{,}8\cdot x_3-4{,}2\cdot x_4 \qquad =-65{,}9 \\ -4{,}3\cdot x_2+1{,}8\cdot x_3-9{,}6\cdot x_4+1{,}8\cdot x_5=-65{,}8 \\ -13{,}4\cdot x_1 \qquad -2{,}4\cdot x_3 \qquad -3{,}7\cdot x_5=-24{,}1 \end{cases}$

6	$\begin{cases} 3\cdot x_1 - 1{,}4\cdot x_2 - 8{,}3\cdot x_3 + 4{,}3\cdot x_5 = 62{,}1 \\ 5{,}4\cdot x_1 + 2{,}1\cdot x_2 + 0{,}9\cdot x_3 - 16{,}4\cdot x_5 = -98{,}9 \\ 10{,}3\cdot x_1 + 2{,}9\cdot x_2 + 3{,}4\cdot x_3 - 0{,}3\cdot x_4 - 6{,}3\cdot x_5 = -12{,}6 \\ 9\cdot x_1 + 2{,}1\cdot x_2 + 2{,}6\cdot x_3 - 9{,}9\cdot x_4 + 2{,}1\cdot x_5 = 78 \\ 2{,}1\cdot x_1 - 11{,}3\cdot x_2 - 4{,}7\cdot x_4 + 2{,}1\cdot x_5 = 98{,}6 \end{cases}$
7	$\begin{cases} -3{,}1\cdot x_1 + 2{,}6\cdot x_2 - 23{,}6\cdot x_3 + 6{,}9\cdot x_4 - 0{,}6\cdot x_5 = -180{,}5 \\ -13{,}5\cdot x_1 - 4{,}3\cdot x_2 + 2{,}4\cdot x_3 + 4{,}3\cdot x_5 = 19{,}4 \\ 0{,}5\cdot x_1 - 16{,}4\cdot x_2 - 7{,}8\cdot x_3 + 2{,}3\cdot x_4 - 1{,}4\cdot x_5 = 5{,}9 \\ 4{,}3\cdot x_1 + 5{,}2\cdot x_2 - 0{,}7\cdot x_3 + 4{,}7\cdot x_4 - 11{,}3\cdot x_5 = -93{,}8 \\ 2{,}9\cdot x_1 - 0{,}9\cdot x_2 + 3{,}6\cdot x_3 - 19{,}4\cdot x_4 + 3{,}7\cdot x_5 = 178 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 17{,}2\cdot x_1 + 4{,}3\cdot x_3 - 6{,}4\cdot x_4 = 71 \\ -4{,}3\cdot x_1 + 2{,}1\cdot x_2 + 1{,}1\cdot x_3 - 13{,}4\cdot x_4 + 4{,}8\cdot x_5 = -68{,}3 \\ 2{,}7\cdot x_1 + 0{,}3\cdot x_2 - 9{,}9\cdot x_3 + 2{,}4\cdot x_5 = -26{,}7 \\ 9{,}4\cdot x_2 + 2{,}4\cdot x_3 - 3{,}9\cdot x_4 - 4{,}3\cdot x_5 = 2{,}8 \\ 8{,}8\cdot x_1 - 5{,}4\cdot x_2 + 0{,}2\cdot x_3 + 3{,}1\cdot x_4 - 13{,}5\cdot x_5 = 149{,}4 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 8\cdot x_1 - 5{,}2\cdot x_2 + 13{,}7\cdot x_4 - 4{,}8\cdot x_5 = 49{,}9 \\ -4{,}3\cdot x_1 + 12{,}4\cdot x_2 + 3{,}2\cdot x_3 - 2{,}9\cdot x_4 = -69{,}9 \\ -2{,}1\cdot x_1 - 1{,}9\cdot x_2 + 0{,}2\cdot x_3 - 2{,}4\cdot x_4 + 10{,}3\cdot x_5 = -2{,}7 \\ 3\cdot x_2 - 5{,}7\cdot x_3 + 1{,}4\cdot x_4 + 5{,}3\cdot x_5 = -3{,}1 \\ 8{,}3\cdot x_1 - 4{,}2\cdot x_2 - 5{,}3\cdot x_4 + 1{,}9\cdot x_5 = 27{,}6 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 8{,}4\cdot x_1 - 3{,}2\cdot x_2 - 4{,}8\cdot x_4 - 3{,}2\cdot x_5 = -24{,}8 \\ -3{,}1\cdot x_1 + 1{,}8\cdot x_2 - 3{,}9\cdot x_3 + 1{,}8\cdot x_4 + 9{,}3\cdot x_5 = -33{,}7 \\ 2{,}9\cdot x_1 - 10{,}5\cdot x_2 + 0{,}8\cdot x_3 - 4{,}3\cdot x_4 + 0{,}2\cdot x_5 = 19{,}2 \\ -2{,}4\cdot x_2 - 0{,}3\cdot x_3 + 12{,}9\cdot x_4 = 101{,}1 \\ -0{,}4\cdot x_1 + 6{,}4\cdot x_3 + 0{,}3\cdot x_4 - 4{,}3\cdot x_5 = 41{,}4 \end{cases}$
11	$\begin{cases} -1{,}8\cdot x_1 - 0{,}3\cdot x_4 + 9{,}4\cdot x_5 = 3{,}4 \\ 2{,}1\cdot x_1 + 9{,}8\cdot x_2 + 0{,}9\cdot x_3 - 2{,}4\cdot x_4 + 2{,}1\cdot x_5 = 47{,}3 \\ 9{,}3\cdot x_1 + 2{,}4\cdot x_2 + 0{,}3\cdot x_3 + 0{,}9\cdot x_4 + 3{,}4\cdot x_5 = 44{,}2 \\ 1{,}8\cdot x_2 + 6{,}3\cdot x_3 - 1{,}4\cdot x_4 - 1{,}9\cdot x_5 = 34 \\ -3{,}2\cdot x_1 + 0{,}9\cdot x_2 - 1{,}4\cdot x_3 + 8{,}6\cdot x_4 = 4{,}2 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 17{,}2\cdot x_1 + 4{,}3\cdot x_3 - 6{,}4\cdot x_4 = 71 \\ -4{,}3\cdot x_1 + 2{,}1\cdot x_2 + 1{,}1\cdot x_3 - 13{,}4\cdot x_4 + 4{,}8\cdot x_5 = -68{,}3 \\ 2{,}7\cdot x_1 + 0{,}3\cdot x_2 - 9{,}9\cdot x_3 + 2{,}4\cdot x_5 = -26{,}7 \\ 9{,}4\cdot x_2 + 2{,}4\cdot x_3 - 3{,}9\cdot x_4 - 4{,}3\cdot x_5 = 2{,}8 \\ 8{,}8\cdot x_1 - 5{,}4\cdot x_2 + 0{,}2\cdot x_3 + 3{,}1\cdot x_4 - 13{,}5\cdot x_5 = 149{,}4 \end{cases}$
13	$\begin{cases} -2{,}2\cdot x_1 + 12{,}1\cdot x_2 + 4{,}3\cdot x_3 - 4{,}3\cdot x_5 = 26{,}3 \\ -1{,}2\cdot x_1 + 4{,}2\cdot x_2 - 2{,}2\cdot x_3 - 10{,}8x_4 = -42{,}6 \\ 3{,}1\cdot x_1 + 2{,}2\cdot x_2 + 13{,}4\cdot x_3 - 4{,}1\cdot x_4 - 3{,}3\cdot x_5 = 24{,}7 \\ 2{,}4\cdot x_1 + 3{,}2\cdot x_2 - 1{,}2\cdot x_3 - 1{,}4\cdot x_4 + 9{,}2\cdot x_5 = 18 \\ 10{,}2\cdot x_1 + 2{,}1\cdot x_2 - 3{,}2\cdot x_3 - 2{,}2\cdot x_4 = -4 \end{cases}$

14	$\begin{cases} 2{,}1\cdot x_1 - 8{,}3\cdot x_2 \qquad\qquad - 2{,}4\cdot x_4 + 3{,}7\cdot x_5 = 44{,}3 \\ 8{,}7\cdot x_1 - 2{,}7\cdot x_2 - 5{,}4\cdot x_3 + 1{,}2\cdot x_4 + 0{,}2\cdot x_5 = 64{,}7 \\ 2{,}3\cdot x_1 - 4{,}1\cdot x_2 + 0{,}3\cdot x_3 + 2{,}1\cdot x_4 - 11{,}4\cdot x_5 = -28{,}9 \\ \qquad 0{,}7\cdot x_2 - 7{,}4\cdot x_3 + 3{,}2\cdot x_4 \qquad\qquad = 17{,}6 \\ -3{,}2\cdot x_1 \qquad - 1{,}9\cdot x_3 + 10{,}3\cdot x_4 - 5{,}4\cdot x_5 = -42{,}2 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1. При разработке алгоритма, реализующего метод Гаусса, какие преобразования необходимо произвести с исходной матрицей?
2. В чем суть операции элементарных преобразований строк матрицы СЛАУ?
3. Запишите СЛАУ в матрично-векторной форме.