Практическое занятие №9

Тема: «Действия над КЧ, заданными в тригонометрической и показательной формах. Тождество Эйлера».

Цель: научиться выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической и показательной форме.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме:

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
3. $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Если r=1, то $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ - формула Муавра.

4. $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$

$z = re^{i\varphi}$ - показательная запись комплексного числа.

Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме:

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
3. $z^n = r^n e^{in\varphi}$

$\bar{z} = re^{-i\varphi}$ - комплексно-сопряженное число.

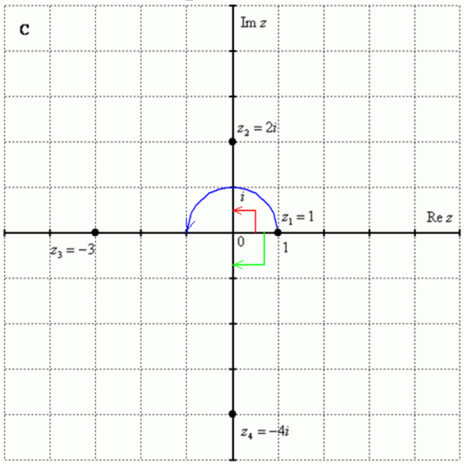
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ - тождество Эйлера.

$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$; $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$

Пример 1. Представить в тригонометрической форме комплексные числа: $z_1 = 1$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -3$, $z_4 = -4i$.

Выполним чертёж:



Для наглядности запишем тригонометрическую форму комплексного числа: $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Запомним намертво, модуль – **длина** (которая всегда неотрицательна), аргумент – **угол**.

1) Представим в тригонометрической форме число $z_1 = 1$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_1| = 1$. Формальный расчет по формуле: $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$.

Очевидно, что $\varphi_1 = 0$ (число лежит непосредственно на действительной положительной полуоси). Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_1 = \cos 0 + i \sin 0$.

Ясно, как день, обратное проверочное действие: $z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$

2) Представим в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_2| = 2$. Формальный расчет по формуле: $|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$.

Очевидно, что $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$ (или 90 градусов). На чертеже угол обозначен красным цветом. Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Используя *таблицу значений тригонометрических функций*, легко обратно получить алгебраическую форму числа (заодно выполнив проверку): $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$

3) Представим в тригонометрической форме число $z_3 = -3$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_3| = 3$. Формальный расчет по формуле: $|z_3| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$.

Очевидно, что $\varphi_3 = \pi$ (или 180 градусов). На чертеже угол обозначен синим цветом. Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_3 = 3(\cos\pi + i \sin\pi)$.

Проверка: $z_3 = 3(\cos\pi + i \sin\pi) = 3(-1 + i \cdot 0) = -3$

4) И четвёртый интересный случай. Представим в тригонометрической форме число $z_4 = -4i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_4| = 4$. Формальный расчет по формуле: $|z_4| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$.

Аргумент можно записать двумя способами: Первый способ: $\varphi_4 = \dfrac{3\pi}{2}$ (270 градусов), и, соответственно: $z_4 = 4\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Проверка: $z_4 = 4\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \sin\dfrac{3\pi}{2}\right) = 4(0 + i \cdot (-1)) = -4i$

Однако более стандартно следующее правило: **Если угол больше 180 градусов**, то его записывают со знаком минус и противоположной ориентацией («прокруткой») угла: $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ (минус 90 градусов), на чертеже угол отмечен зеленым цветом. Легко заметить, что $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ и $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ – это один и тот же угол.

Таким образом, запись принимает вид: $z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Внимание! Ни в коем случае нельзя использовать четность косинуса, нечетность синуса и проводить дальнейшее «упрощение» записи:

$$z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \cancel{= 4\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$$

Пример 2. Представим в тригонометрической форме число $z_4 = 1 - \sqrt{3}i$. Найдем его модуль и аргумент.

$$|z_4| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Поскольку $a > 0$ (случай 1), то $\arg z_4 = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{-\sqrt{3}}{1} = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$ (минус 60 градусов).

Таким образом:

$z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ – число z_4 в тригонометрической форме.

А вот здесь, как уже отмечалось, минусы <u>не трогаем</u>.

Задания для самостоятельного решения:

Вариант 1

1. Представьте в тригонометрической форме комплексное число -3+4i.
2. $z_1 = \sqrt{5}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$. Найдите: $\frac{z_1}{z_2}$ и $\overline{z_1 z_2}$.
3. Представьте в показательной форме комплексное число $-1 - \sqrt{3}i$.

Вариант 2

1. Представьте в тригонометрической форме комплексное число -4-3i.
2. $z_1 = \sqrt{7}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, $z_2 = \sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$. Найдите: $\overline{\frac{z_1}{z_2}}$ и z_1^3.
3. Представьте в показательной форме комплексное число $1 + \sqrt{3}i$.

Вариант 3

1. Представьте в тригонометрической форме комплексное число -6+8i.
2. $z_1 = \sqrt{7}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $z_2 = \sqrt{14}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

   Найдите: $\frac{z_1}{z_2}$ и $\overline{z_1 z_2}$.
3. Представьте в показательной форме комплексное число $-3 - \sqrt{2}i$.

Вариант 4

1. Представьте в тригонометрической форме комплексное число -8-6i.
2. $z_1 = \sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, $z_2 = \sqrt{11}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$. Найдите: $\overline{\frac{z_1}{z_2}}$ и z_1^3.
3. Представьте в показательной форме комплексное число $5 + \sqrt{5}i$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение тригонометрической формы комплексного числа.
2. Что называется тождеством Эйлера?
3. Запишите правила действий над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.
4. Запишите правила действий над комплексными числами, заданными в показательной форме.