Практическое занятие №3
Тема: «Решение систем линейных уравнений методом Крамера».

Цель: научиться применять метод решения систем линейных уравнений методом Крамера.
Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.
Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Пример 1

Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3; \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение.

Найдем определитель матрицы коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot2+2\cdot1\cdot4+(-1)\cdot(-4)\cdot(-3)-[(-1)\cdot1\cdot4+2\cdot(-4)\cdot2+2\cdot1\cdot(-3)]= =4+8-12+4+16+6=26.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то заданная система уравнений совместная и имеет единственное решение. Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot1\cdot2+2\cdot1\cdot5+(-1)\cdot4\cdot(-3)-[(-1)\cdot1\cdot5+2\cdot4\cdot2+3\cdot1\cdot(-3)]= =6+10+12+5-16+9=26;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot2+3\cdot1\cdot4+(-1)\cdot(-4)\cdot5-[(-1)\cdot4\cdot4+3\cdot(-4)\cdot2+2\cdot1\cdot5]= =16+12+20+16+24-10=78;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot5+2\cdot4\cdot4+3\cdot(-4)\cdot(-3)-[3\cdot1\cdot4+2\cdot(-4)\cdot5+2\cdot4\cdot(-3)]= =10+32+36-12+40+24=130.$$

По формулам Крамера находим неизвестные

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{78}{26} = 3, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{130}{26} = 5.$$

Итак $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$ единственное решение системы.

Задание 1. Решить методом Крамера.

1. $$A=\begin{pmatrix} 1.7 & 2.8 & 1.9 \\ 2.1 & 3.4 & 1.8 \\ 4.2 & -1.7 & 1.3 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.1 \\ 2.8 \end{pmatrix}$$

2. $$A=\begin{pmatrix} 9.1 & 5.6 & 7.8 \\ 3.8 & 5.1 & 2.8 \\ 4.1 & 5.7 & 1.2 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 9.8 \\ 6.7 \\ 5.8 \end{pmatrix}$$

3. $$A=\begin{pmatrix} 7.6 & 5.8 & 4.7 \\ 3.8 & 4.1 & 2.7 \\ 2.9 & 2.1 & 3.8 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 10.1 \\ 9.7 \\ 7.8 \end{pmatrix}$$

4. $$A=\begin{pmatrix} 5.4 & -2.3 & 3.4 \\ 4.2 & 1.7 & -2.3 \\ 3.4 & 2.4 & 7.4 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} -3.5 \\ 2.7 \\ 1.9 \end{pmatrix}$$

5. $$A=\begin{pmatrix} 5.6 & 2.7 & -1.7 \\ 3.4 & -3.6 & -6.7 \\ 0.8 & 1.3 & 3.7 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 1.9 \\ -2.4 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

6. $$A=\begin{pmatrix} 4.5 & -3.5 & 7.4 \\ 3.1 & -0.6 & -2.3 \\ 0.8 & 7.4 & -0.5 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 2.5 \\ -1.5 \\ 6.4 \end{pmatrix}$$

7. $$A=\begin{pmatrix} 5.4 & -6.2 & -0.5 \\ 3.4 & 2.3 & 0.8 \\ 2.4 & -1.1 & 3.8 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 0.52 \\ -0.8 \\ 1.8 \end{pmatrix}$$

8. $$A=\begin{pmatrix} 3.2 & -2.5 & 3.7 \\ 0.5 & 0.34 & 1.7 \\ 1.6 & 2.3 & -1.5 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 6.5 \\ -0.24 \\ 4.3 \end{pmatrix}$$

9. $$A=\begin{pmatrix} 3.6 & 1.8 & -4.7 \\ 2.7 & -3.6 & 1.9 \\ 1.5 & 4.5 & 3.3 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 3.8 \\ 0.4 \\ -1.6 \end{pmatrix}$$

10. $$A=\begin{pmatrix} 2.7 & 0.9 & -1.5 \\ 4.5 & -2.8 & 6.7 \\ 5.1 & 3.7 & -1.4 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 3.5 \\ 2.6 \\ -0.14 \end{pmatrix}$$

11. $$A=\begin{pmatrix} 3.8 & 4.1 & -2.3 \\ -2.1 & 3.9 & -5.8 \\ 1.8 & 1.1 & -2.1 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 4.8 \\ 3.3 \\ 5.8 \end{pmatrix}$$

12. $$A=\begin{pmatrix} 2.8 & 3.8 & -3.2 \\ 2.5 & -2.8 & 3.3 \\ 6.5 & -7.1 & 4.8 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 4.5 \\ 7.1 \\ 6.3 \end{pmatrix}$$

13. $$A=\begin{pmatrix} 7.1 & 6.8 & 6.1 \\ 5.0 & 4.8 & 5.3 \\ 8.2 & 7.8 & 7.1 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 7.0 \\ 6.1 \\ 5.8 \end{pmatrix}$$

14. $$A=\begin{pmatrix} 4.1 & 5.2 & -5.8 \\ 3.8 & -3.1 & 4.0 \\ 7.8 & 5.3 & -6.3 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 7.0 \\ 5.3 \\ 5.8 \end{pmatrix}$$

15. $$A=\begin{pmatrix} 6.3 & 5.2 & -0.6 \\ 3.4 & -2.3 & 3.4 \\ 0.8 & 1.4 & 3.5 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.7 \\ -2.3 \end{pmatrix}$$

16. $$A=\begin{pmatrix} 0.9 & 2.7 & -3.8 \\ 2.5 & 5.8 & -0.5 \\ 4.5 & -2.1 & 3.2 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 2.4 \\ 3.5 \\ -1.2 \end{pmatrix}$$

17. $$A=\begin{pmatrix} 5.4 & -2.4 & 3.8 \\ 2.5 & 6.8 & -1.1 \\ 2.7 & -0.6 & 1.5 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 5.5 \\ 4.3 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

18. $$A=\begin{pmatrix} 3.2 & -11.5 & 3.8 \\ 0.8 & 1.3 & -6.4 \\ 2.4 & 7.2 & -1.2 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 2.8 \\ -6.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$$19.\ A=\begin{pmatrix} 9.1 & 5.6 & 7.8 \\ 3.8 & 5.1 & 2.8 \\ 4.1 & 5.7 & 1.2 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 9.8 \\ 6.7 \\ 5.8 \end{pmatrix} \qquad 20.\ A=\begin{pmatrix} 7.6 & 5.8 & 4.7 \\ 3.8 & 4.1 & 2.7 \\ 2.9 & 2.1 & 3.8 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 10.1 \\ 9.7 \\ 7.8 \end{pmatrix}$$

$$21.\ A=\begin{pmatrix} 4.5 & -3.5 & 7.4 \\ 3.1 & -0.6 & -2.3 \\ 0.8 & 7.4 & -0.5 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 2.5 \\ -1.5 \\ 6.4 \end{pmatrix} \qquad 22.\ A=\begin{pmatrix} 5.4 & -6.2 & -0.5 \\ 3.4 & 2.3 & 0.8 \\ 2.4 & -1.1 & 3.8 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 0.52 \\ -0.8 \\ 1.8 \end{pmatrix}$$

$$23.\ A=\begin{pmatrix} 2.8 & 3.8 & -3.2 \\ 2.5 & -2.8 & 3.3 \\ 6.5 & -7.1 & 4.8 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 4.5 \\ 7.1 \\ 6.3 \end{pmatrix} \qquad 24.\ A=\begin{pmatrix} 3.6 & 1.8 & -4.7 \\ 2.7 & -3.6 & 1.9 \\ 1.5 & 4.5 & 3.3 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix} 3.8 \\ 0.4 \\ -1.6 \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы.

1. Как выглядит система линейных уравнений?
2. Как вычисляется главный определитель системы?
3. Как вычисляются дополнительные определители системы?
4. В каком случае СЛАУ имеет единственное решение?
5. По каким формулам вычисляются корни СЛАУ по методу Крамера?