Практическое занятие №2

Тема: «Определители, свойства и вычисления».

Цель: научить находить определитель матрицы, вычислять определители второго и третьего порядков.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Определителем квадратной матрицы первого порядка назовём само число a_{11}, т.е. $\det(A) = a_{11}$. Если порядок n=2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то определителем 2-го порядка назовём число

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

(2.1)

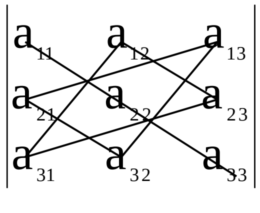
Для случая n = 3 выражение для определителя матрицы имеет вид:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

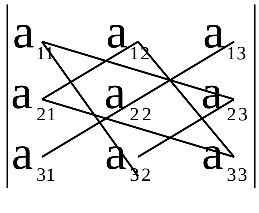
$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

Для запоминания этой формулы нужно уяснить так называемое правило треугольников: Каждое слагаемое определителя состоит из произведения трех элементов, причем три слагаемых берутся со знаком “+” и три слагаемых со знаком “-“. Правило треугольников (или Саррюса) состоит в том, что со знаком “+” берут произведения элементов, стоящих на главной (правой) диагонали, а также стоящих на параллельных этой диагонали прямых и углового элемента, замыкающего треугольник, а со знаком “-“ произведения элементов вспомогательной (левой) диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах треугольников, построенных аналогично предыдущему случаю:

“ + ”



“ - “



Существенно упростить вычисление определителей позволяют его свойства. Отметим без доказательства некоторые из них.

1. Если строки матрицы определителя сделать столбцами с теми же номерами (т.е. транспонировать матрицу), то определитель не изменится.

2. Общий множитель элементов какой-либо строки (или столбца) можно вынести за знак определителя как множитель.

3. Определитель равен нулю, если

- он имеет нулевую строку (или столбец);
- две его строки (или столбца) одинаковы;
- две его строки (или столбца) пропорциональны.

4. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

5. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы), кроме данной, прежние, а в данной строке (столбце) в первом определителе стоят первые, а во втором - вторые слагаемые.

6. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число (теорема о линейной комбинации параллельных рядов определителя).

7. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов. В частности, определитель единичной матрицы равен 1: det(E) = 1.

8. Для любых двух матриц A[n,n] и B[n,n] имеет место равенство:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Задание 1

Вычислите определители третьего порядка

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

Задание 2 Вычислите определить

а) второго порядка

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ 8 $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

.

б) третьего порядка

1. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 0 & -8 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Контрольные вопросы:

1. Что такое определитель?
2. Определители каких матриц можно вычислить?
3. Какой буквой обозначается определитель?
4. Как вычислить определитель 2-го порядка?
5. Как вычислить определитель 3-го порядка?