Практическое занятие №26

Тема: «Вычисление определённого интеграла**».**

Цель: научиться вычислять определенные интегралы, используя непосредственное интегрирование.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы
Теоретические сведения

Определенный интеграл

Пусть функция *f(x)* определена на отрезке [a; b]. Разобьем этот отрезок на n частей точками $a< x_0< x_1< x_2 <....< x_n=b$, выберем на каждом элементарном отрезке $x_{k-1}\le x \le x_k$ произвольную точку ξ_k и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка.

Интегральной суммой для функции *f(x)* на отрезке [a; b] называется сумма вида:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 +...+ f(\xi_n)\Delta x_n$$

Определение. *Определенным интегралом* от функции *f(x)* на отрезке [a; b] называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Для вычисления определенного интеграла от функции *f(x)* служит *формула Ньютона-Лейбница:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a}$$

т. е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Основные свойства определенного интеграла

1⁰. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е. если a = const, то

$$\int_a^b a\,f(x)\,dx = a\int_a^b f(x)\,dx$$

2⁰. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме их интегралов, т. е.

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

3⁰. Если a < c < b, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4⁰. Если функция *f(x)* неотрицательна на отрезке [a; b], где a < b, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

5⁰. Если $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in [a; b]$, где $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x(\,dx$$

Методы вычисления определенного интеграла

Непосредственное интегрирование

Чтобы вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, нужно:

1) найти какую-нибудь первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$ (найти неопределенный интеграл от функции $f(x)$, в котором можно принять $C = 0$);

2) в полученном выражении подставить вместо x сначала верхний предел a, а затем нижний предел b, и из результата первой подстановки вычесть результат второй.

Пример 1. Вычислить $\int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 7)\,dx$

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница получаем: $\int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 7)\,dx =$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{3}{2}\cdot 2^2 + 7\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2 + 7\cdot(-1)\right) = 19,5$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctg\,x\Big|_0^1 = arctg\,1 - arctg\,0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

Пример 3. Найти $\int_a^b dx$

Решение. $\int_a^b dx = x\Big|_a^b = b - a$

Задания для самостоятельного решения.

Вычислить определенный интеграл методом непосредственного интегрирования

1. $a)\int_1^2 \left(3x^2 - 2x\right)dx$

   $b)\int_{\Pi}^{2\Pi} \frac{\cos x}{6}\,dx$

11. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\cos^2 \frac{1}{2}x}\,dx$

   $b)\int_2^3 (1-x)^4\,dx$

21. $a)\int_1^2 \left(4x^3 - 3x^2\right)dx$

   $b)\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

2. $a)\int_{-2}^{1}\left(x^2-x\right)dx$

$b)\int_{-\Pi/6}^{\Pi/6}\frac{6dx}{cos^2 2x}$

3. $a)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\cos x dx$

$b)\int_{0}^{2}(1-\frac{x}{2})^4 dx$

4. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{\cos^2 x}dx$

$b)\int_{-1}^{4}(1+\frac{x}{2})^8 dx$

5. $a)\int_{1}^{2}\left(4x^3+2x\right)dx$

$b)\int_{0}^{\Pi}\frac{3dx}{\cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\Pi}{3})}$

6. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(4\cos 2x\right)dx$

$b)\int_{1}^{5}\sqrt{9x-1}dx$

7. $a)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(6\sin 2x\right)dx$

$b)\int_{1}^{2}(3-2x)^4 dx$

8. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{5}{\cos^2 x}dx$

$b)\int_{-3}^{1}\frac{dx}{5-3x}$

12. $a)\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi}\cos\frac{1}{3}x dx$

$b)\int_{-1}^{4}(1+\frac{x}{2})^8 dx$

13. $a)\int_{2}^{3}\left(3x^2-2x\right)dx$

$b)\int_{-\Pi/2}^{\Pi/2}3\sin x dx$

14. $a)\int_{0}^{\pi}\left(3\sin\frac{1}{2}x\right)dx$

$b)\int_{1}^{0}(1-2x)^4 dx$

15. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(36\cos 2x\right)dx$

$b)\int_{-2}^{3}\frac{2dx}{(3-x^2)}dx$

16. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos x dx$

$b)\int_{2}^{3}(1-2x)^4 dx$

17. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{36}{\cos^2 2x}dx$

$b)\int_{2}^{3}(3-x^2)dx$

18. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin x\right)dx$

$b)\int_{0}^{4}(x^2+1)dx$

22. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{9}}\left(2\cos 3x\right)dx$

$b)\int_{0}^{2}(1-\frac{x}{2})^4 dx$

23. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{12}}\left(108\sin 6x\right)dx$

$b)\int_{-1}^{1}(7-5x)dx$

24. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{4}{\cos^2 2x}dx$

$b)\int_{-2}^{1}(4x^3+6x)dx$

25. $a)\int_{1}^{2}\left(5x^4-6x^2\right)dx$

$b)\int_{1}^{9}\sqrt{8x-5}dx$

26. $a)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{5}{\sin^2 x}dx$

$b)\int_{-2}^{0}(x^5-3x^2)$

27. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(2\sin x\right)dx$

$b)\int_{1}^{2}(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^3})dx$

28. $a)\int_{1}^{3}\left(3x^2+4x^3\right)dx$

$b)\int_{\Pi/4}^{\Pi/8}\frac{\cos 4x}{2}dx$

9. $a)\int_0^2 \left(x^3 - x^2 + 3\right)dx$

$b)\int_1^2 e^{2x+3}dx$

19. $a)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\ x dx$

$b)\int_2^3 (7-2x)^4\, dx$

29. $a)\int_2^3 \left(2x^3 - 2x\right)dx$

$b)\int_0^{\Pi/6} \frac{4dx}{\cos^2 2x}$

10. $a)\int_1^2 \left(x^4 - x^3 + 2\right)dx$

$b)\int_0^1 5^{4-3x} dx$

20. $a)\int_0^2 \left(x^3 - x\right)dx$

$b)\int_0^{\Pi/3} 3\sin 3x dx$

30. $a)\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} \left(2\sin\ 3x\right)dx$

$b)\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4}$

Контрольные вопросы:

1. Что называют определенным интегралом функции $f(x)$?
2. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
3. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
5. Запишите свойства определенного интеграла.
6. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
7. Расскажите о способе непосредственного интегрирования определенного интеграла.