Практическое занятие №25

Тема: «Решение дифференциальных уравнений высших порядков, допускающие понижение порядка».

Цель: Закрепить умения решать дифференциальные уравнения второго порядка.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Теоретический материал

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Это уравнения вида $y'' + py' + qy = 0$, где p и q – некоторые действительные числа. Заменив в нем y'' на k^2, y' – на k и y – на $k^0 = 1$, получим $k^2 + pk + q = 0$ - *характеристическое уравнение*.

Вид общего решения уравнения (1) зависит от корней характеристического уравнения

Корни $k^2 + pk + q = 0$	Общее решение $y'' + py' + qy = 0$
k_1, k_2 – действительные числа и $k_1 \neq k_2$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
k_1, k_2 – действительные числа и $k_1 = k_2 = k$	$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$
k_1 , k_2 – комплексные числа: $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: а) $4y'' - 4y' + y = 0$; б) $y'' - 3y' = 0$; в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Решение.

Для каждого из данных уравнений составляем характеристическое уравнение и решаем его. По виду полученных корней записываем общее решение дифференциального уравнения (см. табл.):

а) $4k^2 - 4k + 1 = 0$, корни $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$ – действительные и равные, поэтому общее решение уравнения $y = e^{x/2}(C_1 + C_2 x)$;

б) $k^2 - 3k = 0$, $k(k-3) = 0$, корни $k_1 = 0$, $k_2 = 3$ – действительные и различные, поэтому общее решение уравнения $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{3x} = C_1 + C_2 e^{3x}$;

в) $k^2 - 2k + 10 = 0$, корни $k_{1,2} = 1 \pm 3i$ – комплексно-сопряженные, поэтому общее решение уравнения $y = e^{x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Это уравнения вида $y'' + py' + qy = f(x)$, его решение: $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$.

Структура частного решения определяется правой частью $f(x)$ уравнения

№	Вид $f(x)$	Структура $y_{ч.н.}$

1.	$f(x)=P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $P_n(x)$ – многочлен степени n	$y_{ч.н.}=x^rQ_n(x)=$ $=x^r\left(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n\right)$, где $r=\begin{cases}0, & k_{1,2}\neq 0,\\ 1, & k_1=0.\end{cases}$
2.	$f(x)=P_n(x)e^{mx}$	$y_{ч.н.}=x^rQ_n(x)e^{mx}$, где $r=\begin{cases}0, & k_{1,2}\neq m,\\ 1, & k_1=m,\\ 2, & k_{1,2}=m.\end{cases}$
3.	$f(x)=M\cos bx+N\sin bx$	$y_{ч.н.}=x^r(A\cos bx+B\sin bx)$, где $r=\begin{cases}0, & k_1\neq ib,\\ 1, & k_1=ib.\end{cases}$

В таблице $a_0, a_1, ..., a_n$, m , b , M , N – известные числа, k_1 , k_2 – корни характеристического уравнения, $A_0, A_1, ..., A_n$, A, B – неизвестные коэффициенты, которые находятся путем подстановки $y_{ч.н.}$ в исходное уравнение (*метод неопределенных коэффициентов*).

Пример. Определить и записать структуру частного решения $y_{ч.н.}$ уравнения $y''+36y=f(x)$ по виду функции $f(x)$, если а) $f(x)=4xe^{-x}$; б) $f(x)=2\sin 6x$.

Решение.

Находим корни характеристического уравнения: $k^2+36=0$, $k_{1,2}=\pm 6i$.

а) Так как $f(x)=4xe^{-x}=P_1(x)e^{mx}$, где $P_1(x)=4x$, $m=-1$ (случай 2 в табл. 2.2), то частное решение имеет вид $y_{ч.н.}=x^0Q_1(x)e^{-x}=(Ax+B)e^{-x}$.

$r=0$, т. к. среди корней характеристического уравнения нет равных -1.

б) Поскольку $f(x)=2\sin 6x=0\cdot\cos 6x+2\sin 6x$ (случай 3 в табл. 2.2): $M=0$, $N=2$, $b=6$), то $y_{ч.н.}=x(A\cos 6x+B\sin 6x)$,

множитель x появился потому, что $6i$ является корнем характеристического уравнения.

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

1.Если дифференциальное уравнение имеет вид $y''=f(x)$, то оно решается последовательным интегрированием.

2.Если в запись уравнения не входит функция y(x), т.е. оно имеет вид $G(x,y',y'')=0$, то такое уравнение можно решить, найдя вспомогательную функцию $z=y',\ \ z'=y''$.

Пример: Решить уравнение $xy''+y'=0$.

Решение: Положим $z=y',\ \ z'=y''$.

Исходное уравнение примет вид $xz'+z=0$.

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{dz}{z} = -\int\frac{dx}{x}$$
$$z = C_1 / x$$
Возвращаясь к первоначальной функции, получаем уравнение
$$y' = C_1 / x$$
$$dy = C_1 dx / x$$
$$y = C_1 \ln|x| + C_2$$

3.Если в запись уравнения не входит переменная x, т.е. оно имеет вид $G(y, y', y'') = 0,$ то такое уравнение можно решить, найдя вспомогательную функцию $z = z(y) = y', \quad z'z = y''$.

Пример: Решить уравнение $2yy'' = (y')^2 + 1$.

Решение: Положим $z = z(y) = y', \quad z'z = y''$. Исходное уравнение примет вид $2yzz' = z^2 + 1$
.

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.
$$\frac{2zdz}{z^2+1} = \frac{dy}{y}$$
$$\int\frac{d(z^2+1)}{z^2+1} = \int\frac{dy}{y}$$
$$\ln(z^2+1) = \ln|y| + C, \quad C = \ln C_1,$$
$$\ln(z^2+1) = \ln|y| + \ln C_1,$$
$$\ln(z^2+1) = \ln|yC_1|,$$
$$(z^2+1) = |yC_1|,$$
$$z^2 = C_1 y - 1,$$
$$z = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$$
Возвращаясь к первоначальной функции, получаем уравнение
$$y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$$
$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx \qquad \pm\int\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \int dx$$
$$\pm\sqrt{C_1 y - 1} = \frac{C_1}{2}(x + C_2) \qquad C_1 y - 1 = \frac{C_1^2}{4}(x + C_2)^2$$

Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
   1) $y'' - 2y' + 10y = 0$, 2) $y'' - 2y' = 0$; 3) $y'' + y' - 2y = 0$.
2. Записать структуру частного решения линейного неоднородного уравнения по виду правой части.

$2y'' - 7y' + 3y = f(x)$ а) $f(x) = (2x+1)e^{3x}$; б) $f(x) = \cos 3x$

3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
   1) $y'' + 36y = xe^{x}$; 2) $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения:
   1) $y''' = \sin x$; 2) $y''' = e^{2x}$.
5. Найти решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.
   1) $x^3 \cdot y'' + x^2 y' = 1$, 2) $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Вариант 2

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
   1) $4y'' - 8y' + 3y = 0$; 2) $y'' - 3y' = 0$; 3) $y'' - 2y' + 10y = 0$.
2. Записать структуру частного решения линейного неоднородного уравнения по виду правой части:
   $2y'' - 9y' + 4y = f(x)$ а) $f(x) = -2e^{4x}$; б) $f(x) = 5\cos 4x$.
3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
   1) $y'' + 6y' + 9y = 4e^{2x}$; 2) $y'' + 5y' = 2\cos 3x + 4\sin 3x$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения:
   1) $y''' = \dfrac{1}{x}$; 2) $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 2x}$.
5. Найти решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.
   1) $xy'' - y' = x^2 e^{x}$, 2) $2y \cdot y'' = (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Вариант 3

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
   1) $y'' + y' - 6y = 0$, 2) $y'' + 9y' = 0$; 3) $y'' - 4y' + 20y = 0$.
2. Записать структуру частного решения линейного неоднородного уравнения по виду правой части.
   $y'' - y' + y = f(x)$ а) $f(x) = 10\cos x$; б) $f(x) = 7x + 2$.
3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
   1) $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$; 2) $y'' - 14y' + 49y = 144\sin 7x$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения:
   1) $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 2) $y'' = \cos x + e^{-x}$
5. Найти решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.
   1) $x^2 y'' + xy' = 1$, 2) $y'' = -\dfrac{1}{(2y^3)}$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

Вариант 4

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
   1) $y'' - 4y' = 0$; 2) $y'' + 2y' + 17y = 0$; 3) $y'' - y' - 12y = 0$.
2. Записать структуру частного решения линейного неоднородного уравнения по виду правой части.
   $y'' + 49y = f(x)$ а) $f(x) = x^3 + 4x$; б) $f(x) = 3\sin 7x$.
3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
   1) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$; 2) $4y'' - 4y' = y = -25\cos x$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения:
   1) $y'' = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; 2) $y'' = 4\cos 2x$.
5. Найти решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.
   1) $xy'' = y' + x^2$, 2) $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

Контрольные вопросы:

1. Запишите обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка в общем виде и раскройте смысл всех входящих в уравнение величин.
2. Как определяется порядок дифференциального уравнения?
3. Записать дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно производной.
4. Объяснить назначение начальных условий дифференциального уравнения.