Практическое занятие №24

Тема: «Решение уравнений в полных дифференциалах**»**.

Цель: Научиться решению уравнений в полных дифференциалах.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Теоретические сведения

Дифференциальным уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

где левая часть является полным дифференциалом какой-либо функции двух переменных.

Обозначим неизвестную функцию двух переменных (её-то и требуется найти при решении уравнений в полных дифференциалах) через F.

Первое, на что следует обратить внимание: в правой части уравнения обязательно должен быть нуль, а знак, соединяющий два члена в левой части, должен быть плюсом.

Второе - должно соблюдаться некоторое равенство, которое является подтверждением того, что данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Эта проверка является обязательной частью алгоритма решения уравнений в полных дифференциалах, так процесс поиска функции F достаточно трудоёмкий и важно на начальном этапе убедиться в том, что мы не потратим время зря.

Итак, неизвестную функцию, которую требуется найти, обозначили через F. Сумма частных дифференциалов по всем независимым переменным даёт полный дифференциал. Следовательно, если уравнение является уравнением в полных дифференциалах, левая часть уравнения представляет собой сумму частных дифференциалов. Тогда по определению

$$dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Вспоминаем формулу вычисления полного дифференциала функции двух переменных:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

Решая два последних равенства, можем записать

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y).$$

Первое равенство дифференцируем по переменной "игрек", второе - по переменной "икс":

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$

получим

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

что является условием того, что данное дифференциальное уравнение действительно представляет собой уравнение в полных дифференциалах.

Алгоритм решения дифференциальных уравнений в полных дифференциалах

Шаг 1. Убедиться, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Для того, чтобы выражение $P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)$ было полным дифференциалом некоторой функции $F(x,\ y)$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Иными словами, нужно взять частную производную по x одного слагаемого в левой части выражения и частную производную по y другого слагаемого и, если эти производные равны, то уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Шаг 2. Записать систему уравнений из частных производных, составляющих функцию F:

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,\ y)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,\ y)\end{cases}$$

Шаг 3. Проинтегрировать первое уравнение системы - $\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,\ y)$ по x (y остаётся константой и выносится за знак интеграла). Таким образом восстанавливаем функцию F:

$$F(x,\ y)=\int P(x,\ y)dx+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ - пока неизвестная функция от y.

Альтернативный вариант (если так интеграл найти проще) - проинтегрировать второе уравнение системы - $\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,\ y)$ по y (x остаётся константой и выносится за знак интеграла). Таким образом так же восстанавливается функция F:

$$F(x,\ y)=\int Q(x,\ y)dy+\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ - пока неизвестная функция от x.

Шаг 4. Результат шага 3 (найденный общий интеграл) продифференцировать по y (в альтернативном варианте - по x) и приравнять ко второму уравнению системы:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,\ y)dx\right)+\varphi'(y)=Q(x,\ y),$$

а в альтернативном варианте - к первому уравнению системы:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int Q(x,\ y)dy\right)+\varphi'(x)=P(x,\ y).$$

Из полученного уравнения определяем $\varphi'(y)$ (в альтернативном варианте $\varphi'(x)$)

Шаг 5. Результат шага 4 интегрировать и найти $\varphi(y)$ (в альтернативном варианте найти $\varphi(x)$).

Шаг 6. Результат шага 5 подставить в результат шага 3 - в восстановленную частным интегрированием функцию F. Произвольную постоянную C чаще записывают после знака равенства - в правой части уравнения. Таким образом получаем общее решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах. Оно, как уже говорилось, имеет вид $F(x, y) = C$.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$(2x+y)dx+(x+2y)dy=0.$$

Шаг 1. Убедимся, что уравнение является ***уравнением в полных дифференциалах***. Для этого находим частную производную по x одного слагаемого в левой части выражения

$$(2x+y)'_x = 2$$

и частную производную по y другого слагаемого

$$(x+2y)'_y = 2$$

. Эти производные равны, значит, уравнение является ***уравнением в полных дифференциалах***.

Шаг 2. Запишем систему уравнений из частных производных, составляющих функцию F:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x+y \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x+2y \end{cases}$$

Шаг 3. Проинтегрируем первое уравнение системы - $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x+y$ по x (y остаётся константой и выносится за знак интеграла). Таким образом восстанавливаем функцию F:

$$F = \int (2x+y)dx = 2\int xdx + y\int dx =$$

$$= x^2 + xy + \varphi(x),$$

где $\varphi(y)$ - пока неизвестная функция от y.

Шаг 4. Результат шага 3 (найденный общий интеграл) продифференцируем по y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(x^2 + xy + \varphi(y)\right)'_y =$$

$$= 0 + x + \varphi'_y(y) = x + \varphi'_y(y)$$

и приравняем ко второму уравнению системы:

$$x + \varphi'_y(y) = x + 2y.$$

Из полученного уравнения определяем $\varphi'(y)$: $\varphi'_y(y) = 2y$.

Шаг 5. Результат шага 4 интегрируем и находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = \int 2ydy = 2\int ydy = 2\frac{y^2}{2} + C =$$

$$= y^2 + C.$$

Шаг 6. Результат шага 5 подставляем в результат шага 3 - в восстановленную частным интегрированием функцию F. Произвольную постоянную C записываем после знака равенства. Таким образом получаем общее ***решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах***:

$$F = x^2 + xy + y^2 = C.$$

Какая ошибка возможна здесь с наибольшей вероятностью? Самые распространённые ошибки - принять частный интеграл по одной из переменных за обычный интеграл произведения функций и пытаться интегрировать по частям или заменной переменной а также принять частную производную двух сомножителей за производную произведения функций и искать производную по соответствующей формуле.

Это надо запомнить: при вычислении частного интеграла по одной из переменной другая является константой и выносится за знак интеграла, а при вычислении частной производной по одной из переменной другая также является константой и производная выражения находится как производная "действующей" переменной, умноженной на константу.

Задания для самостоятельного решения.

Проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах и решить их:

1. $3x^2 \cdot e^y \cdot dx + \left(x^3 \cdot e^y - 1\right)dy = 0.$
2. $\left(1 + y^2 \cdot \sin 2x\right) \cdot dx - 2y \cdot \cos^2 x \cdot dy = 0.$
3. $\left(3x^2 + 4y^2\right)dx + \left(8xy + e^y\right)dy = 0.$
4. $e^{-y} \cdot dx - \left(2y + x \cdot e^{-y}\right) \cdot dy = 0.$
5. $\left(y^2 + \dfrac{y}{\cos^2 x}\right)dx + \left(2xy + \operatorname{tg} x\right)dy = 0.$
6. $\left(3x^2 y + 2y + 3\right)dx + \left(x^3 + 2x + 3y^2\right)dy = 0.$
7. $2x \cdot \left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right) \cdot dx - \sqrt{x^2 - y} \cdot dy = 0.$
8. $\left(\sin 2x - 2\cos(x + y)\right)dx - 2\cos(x + y)dy = 0.$
9. $3x^2 \cdot (1 + \ln y) \cdot dy = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right) \cdot dy.$
10. $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx - \dfrac{2y}{x^3}dy = 0.$
11. $e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy = 0.$
12. $\dfrac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ln x\right)dy = 0.$
13. $(x \cdot \cos 2y + 1) \cdot dx - x^2 \cdot \sin 2y \cdot dy = 0.$
14. $\dfrac{1 + xy}{x^2 y}dx + \dfrac{1 - xy}{xy^2}dy = 0.$
15. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) \cdot dx + e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(1 - \dfrac{x}{y}\right) \cdot dy = 0.$
16. $\dfrac{y}{x^2} \cdot dx - \dfrac{xy + 1}{x} \cdot dy = 0.$
17. $\left(xe^x + \dfrac{y}{x^2}\right)dx = \dfrac{1}{x}dy.$

18. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y^2}\right)\cdot dx=\sqrt{x^2-y}\cdot dy$

19. $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\dfrac{xdy}{x^2+y^2}=0.$

20. $e^y\cdot dx+\left(\cos y+xe^y\right)\cdot dy=0$

21. $\left(y^3+\cos x\right)\cdot dx+\left(3xy^2+e^y\right)\cdot dy=0$

22. $xe^{y^2}\cdot dx+\left(x^2y\cdot e^{y^2}+\mathrm{tg}^2 y\right)\cdot dy=0$

23. $\dfrac{x\cdot dy-y\cdot dx}{x^2+y^2}=0.$

24. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1\right)\cdot dy-\dfrac{y\cdot dy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0.$

25. $\left(\sin y+y\cdot\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cdot\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0.$

26. $\left(1+y^2\cdot\sin 2x\right)\cdot dx-2y\cdot\cos^2 x\cdot dy=0.$

27. $3x^2\cdot(1+\ln y)dx=\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy.$

28. $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx+\dfrac{\left(x^2+1\right)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0.$

Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах?
2. Сформулируйте условие, при котором заданное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.