Практическое занятие №23
Тема: «Решение уравнений Бернулли».

Цель: Научиться решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка**.**
Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.
Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы
Теоретические сведения

Нахождение общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x)y + g(x)$$

сводится к решению двух дифференциальных уравнений с разделенными переменными с помощью подстановки $y=uv$, где u и v - неизвестные функции от x. Этот метод решения называется методом Бернулли.

Алгоритм решения линейного дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x)y + g(x)$

1. Ввести подстановку $y=uv$.
2. Продифференцировать это равенство $y' = u'v + uv'$
3. Подставить y и y' в данное уравнение: $u'v + uv' = f(x)uv + g(x)$ или $u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$.
4. Сгруппировать члены уравнения так, чтобы u вынести за скобки: $u'v + (uv' + f(x)uv) = g(x)$, $u'v + u(v' + f(x)v) = g(x)$.
5. Из скобки, приравняв ее к нулю, найти функцию $v = v(x)$: $v' + f(x)v = 0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dv}{dx} + f(x)v = 0$, $\frac{dv}{dx} = -f(x)v$.

Разделим переменные и получим: $\frac{dv}{v} = -f(x)dx$,

Откуда $\int\frac{dv}{v} = -\int f(x)dx, \ln|v| = -\int f(x)dx$. $v = e^{-\int f(x)dx}$.

6. Подставить полученное значение v в уравнение $u'v = g(x)$ (из п.4):

$$u'e^{-\int f(x)dx} = g(x)$$

и найти функцию $u = u(x;c)$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{du}{dx}e^{-\int f(x)dx} = g(x)$, $du = e^{\int f(x)dx} = g(x)$,

$$u = \int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + C.$$

7. Записать общее решение в виде: $y = v(x)\cdot u(x;c)$,

т.е. $y = e^{-\int f(x)dx}\cdot\left(\int e^{\int f(x)dx}\cdot g(x)dx + C\right)$.

Пример 1

Найти частное решение уравнения $y' = -2y +3 = 0$ если $y =1$ при $x = 0$

Решение. Решим его с помощью подстановки $y=uv$, $.y' = u'v + uv'$

Подставляя y и y' в данное уравнение, получим $u'v + uv' - 2uv = -3$.

Сгруппировав второе и третье слагаемое левой части уравнения, вынесем общий множитель u за скобки $u'v + (uv' - 2uv) = -3$, $u'v + u(v' - 2v) = 0$.

Выражение в скобках приравниваем к нулю и, решив полученное уравнение, найдем функцию $v = v(x)$ $v' - 2v = 0, \quad \frac{dv}{dx} = 2v, \quad dv = 2v dx, \quad \frac{dv}{v} = 2dx.$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части этого уравнения: $\int \frac{dv}{v} = \int 2dx.$ Найдем функцию v: $\ln|v| = 2x, \quad v = e^{2x}.$

Подставим полученное значение v в уравнение $u'v = -3.$ Получим: $u'e^{2x} = -3, \quad \frac{du}{dx}e^{2x} = -3, \quad du = -3e^{-2x}dx.$

Это уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части уравнения: $\int du = -\int 3e^{-2x}dx.$ Найдем функцию $u = u(x,c)$ $u = -3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + C, \quad u = \frac{3}{2}e^{-2x} + C.$ Найдем общее решение: $y = e^{2x} \cdot \left(\frac{3}{2}e^{-2x} + C\right), \quad y = \frac{3}{2} + Ce^{2x}.$ Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y = 1$ при $x = 0$:

$$1 = \frac{3}{2} + Ce^{2\cdot 0}, \quad 1 = \frac{3}{2} + C \cdot 1, \quad C = 1 - \frac{3}{2}, \quad C = -\frac{1}{2},$$

$$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{2x}, \quad y = \frac{3 - e^{2x}}{2} - \text{ частное решение.}$$

Ответ: $y = \frac{3 - e^{2x}}{2}.$

Задания для самостоятельного решения.

Задание 1.

1. $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{3}x^2y^4$
2. $2y' - \frac{y}{x} = \frac{4x^2}{y}$
3. $(1 + x^2)y' = 2xy + x^2y^2$
4. $y' - 2y = -y^3; \quad y(0) = 1$
5. $xy' + 2y = xy^4$
6. $x^3 \sin y\, dy = x\, dy - 2y\, dx$

Задание 2.

1. $xy' - 2y = \frac{x}{y^3}$
2. $y' - \frac{y}{2x} = 3y^4$
3. $y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y^3}$
4. $y' + \frac{3y}{x} = 5x^3y^2$
5. $y' + 2y = 3y^2e^x$
6. $(2x^2 + y^3)y' = xy$

Контрольные вопросы:

1. Написать общий вид уравнения Бернулли.
2. Какие из приведенных уравнений являются уравнениями Бернулли:

а) $y'\sin x + y\cos x = y^{100}$

б) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{x}{y^2}$

в) $xy' + \dfrac{x}{\sqrt{y}} = y\,\mathrm{tg}\,x$

г) $xy' + x^2 y = y^3 + 1$

3. Что называется общим и частным решением дифференциального уравнения?