Практическое занятие №21

Тема: «Решение однородных дифференциальных уравнений».

Цель: Научиться решать однородные дифференциальные уравнения.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Теоретические сведения

Пример 1. Найти общее решение уравнения $xdy = (x + y)dx$.

Решение. Это уравнение однородное, так как обе функции $P(x, y) = x + y$ и $Q(x, y) = x$ – однородные первого измерения, удовлетворяющие условиям

$$P(tx,ty) = tx + ty = t(x + y) = t^1 P(x, y),$$

$$Q(tx,ty) = tx = t^1 Q(x, y).$$

Пусть $y = zx$, тогда $dy = zdx + xdz$. Подставляя значения y и dy в исходное уравнение, получим

$$x(zdx + xdz) = (x + zx)dx.$$

После упрощения получим

$$xdz = dx .$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int dz = \int \frac{dx}{x} \qquad z = \ln|x| + C .$$

Возвращаясь к старой переменной ($z = \frac{y}{x}$), получим

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C \qquad y = x(\ln|x| + C) .$$

Ответ. $y = x(\ln |x| + C)$. ■

Задания для самостоятельного решения.

1. $y' = \cos^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$
2. $xy' = \sqrt{3x^2 + y^2}$
3. $y' = \frac{x + 3y}{x - y}$
4. $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$

.

1. $x^2 y' = \cos^2 2y$
2. $e^{3x} y' = y^2 - 3$
3. $(x^2 + 4)y' = \operatorname{tg} y$
4. $(y^2 - 4)dx + \sqrt{3 - x^2} \cdot ydy = 0$
5. $y' - \frac{x^4}{y^4} = \frac{y}{x}$
6. $y' = \frac{y + x}{y - x}$
7. $x \ln\left(\frac{x}{y}\right)dy - ydx = 0$
8. $xy' = y + \sqrt{x^2 + 3y^2}$
9. $\left(3x^2 + 6xy + 3x^2\right)dx + \left(2x^2 + 3xy\right)dy = 0$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения.
3. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка.