Практическое занятие №20

Тема: «Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными**»**.

Цель: Научиться решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Теоретические сведения

Пример 1.

Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = (x+1)\cos^2 y$.

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{(\cos^2 y)} = (x+1)\,dx.$$

Т. к. начальные условия не заданы, возьмем неопределенный интеграл от обеих частей уравнения:

$$\int \frac{dy}{(\cos^2 y)} = \int (x+1)\,dx,$$

$$\operatorname{tg}\ y = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Осталось лишь выразить y через x:

$$y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right).$$

Найдем также нулевые решения:

$$\cos^2 y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $y(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right),\ C = \text{const},\ y(x) = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Пример 2.

Решить уравнение

$$y' = x^2 \sqrt[3]{y}$$

Решение

Выразим производную через дифференциалы:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt[3]{y}$$

Умножим на *dx* и разделим на $\sqrt[3]{y}$. При $y \neq 0$ имеем:

$$\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = x^2\,dx$$

Интегрируем.

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \int x^2\,dx + C$$

Вычисляем интегралы, применяя формулу $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$.

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \int y^{-1/3}\,dy = \frac{1}{-1/3+1}\,y^{-1/3+1} = \frac{3}{2}\,y^{\frac{2}{3}}$$

$$\left[-\frac{1}{3} + 1 = \frac{-1+3}{3} = \frac{2}{3}\right]$$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{2+1}\,x^{2+1} = \frac{1}{3}\,x^3$$

Подставляя, получаем общий интеграл уравнения

$$\frac{3}{2}\,y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\,x^3 + C.$$

Теперь рассмотрим случай, *y* = 0.

Очевидно, что $y = 0$ является решением исходного уравнения. Оно не входит в общий интеграл $\frac{3}{2}\,y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\,x^3 + C$.

Поэтому добавим его в окончательный результат.

Ответ

$\frac{3}{2}\,y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\,x^3 + C$; $y = 0$.

Пример 3. Найти частное решение уравнения $(1+e^{2x})y^2y'=e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$

Запишем данное уравнение в дифференциальной форме: $(1+e^{2x})y^2dy-e^xdx=0$. Теперь разделим переменные: dx=0

$$y^2dy - \left(1+\frac{1}{x}\right)dx + \left(1+\frac{1}{y}\right)dy = 0$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

dy-$\frac{e^x}{1+e^{2x}}$

Получили общее решение исходного уравнения. Использовав начальное условие, определим значение произвольной постоянной: dy-

$$\int y^2dy - \int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = C, \Rightarrow \frac{y^3}{3} - arctg\ e^x = C, \Rightarrow y = \sqrt[3]{3(C + arctg\ e^x)}.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид dy-

$$1 = \sqrt[3]{3(C+\frac{\pi}{4})}, \Rightarrow C = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}$$

Задания для самостоятельного решения.

Индивидуальное задание по порядковому номеру в журнале, т.е в задании вместо N студент подставляет свой порядковый номер.

Решить дифференциальные уравнения и найти частные решения.

1) $\frac{N}{2}x^2dx + (N-5)ydy = 0; x = 0; y = 2$

2) $\frac{dy}{N-y} - \frac{dx}{x-N} = 0; x = 0; y = 1$

3) $(N + 2y)dx - (N - 5 - x)dy = 0; x = 0; y = 1$

Контрольные вопросы:

1.Дайте определение дифференциального уравнения.

2. Что называют решением дифференциального уравнения?

3. Какое дифференциальное уравнение называют общим, какое в частных производных?

4. Что называют задачей Коши?

5. Какое дифференциальное уравнение называют уравнением с разделяющимися переменными.