Практическое занятие №19

Тема: «Вычисление неопределенных интегралов по частям».

Цель: совершенствование умений находить неопределенные интегралы по частям, совершенствование умений проверять действие интегрирования дифференцированием.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы
Теоретические сведения

Интегрирование по частям.

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям. Если производные функций $U=U(x)$ и $V=V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$\boxed{\int UdV = UV - \int VdU,}$ называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n=1,2,\ldots$	$U=P_n(x)\to$ $\to dU=P_n'(x)dx$	$dV=\sin kx\,dx \to V=-\frac{1}{k}\cos kx$ $dV=\cos kx\,dx \to V=\frac{1}{k}\sin kx$ $dV=e^{kx}dx \to V=\frac{1}{k}e^{kx}$

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int \ln kx\,P_n(x)dx$	$U=\ln kx \to dU=\frac{dx}{x}$	$dV=P_n(x)dx\to$ $\to V=\int P_n(x)dx$
$\int \arcsin kx\,P_n(x)dx$	$U=\arcsin kx \to dU=\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\,P_n(x)dx$	$U=\arccos kx \to dU=-\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \mathrm{arctg}\,kx\,P_n(x)dx$	$U=\mathrm{arctg}\,kx \to dU=\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \mathrm{arcctg}\,kx\,P_n(x)dx$	$U=\mathrm{arcctg}\,kx \to dU=-\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$n=0,1,2,\ldots$		

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$, где $a_0\neq 0$.

Пример 2. Проинтегрировать по частям.

а) $\int(3x-1)\sin 2xdx;$ *б*) $\int(1+2x)\ln xdx.$

Решение.

à) $\int(3x-1)\sin 2xdx=\left|\begin{array}{l} U=3x-1\rightarrow dU=3dx \\ dV=\sin 2xdx\rightarrow V=-\dfrac{\cos 2x}{2}\end{array}\right|=(3x-1)(-\dfrac{\cos 2x}{2})+\int\dfrac{\cos 2x}{2}dx=$

$=-\dfrac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\dfrac{3}{2}\int\cos 2xdx=-\dfrac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\dfrac{3}{4}\sin 2x+C.$

б) $\int(1+2x)\ln xdx=\left|\begin{array}{l} U=\ln x\rightarrow dU=\dfrac{dx}{x} \\ dV=(1+2x)dx\rightarrow \\ V=\int(1+2x)dx=x+x^2\end{array}\right|=\ln x(x+x^2)-\int(x+x^2)\dfrac{dx}{x}=$

$=\ln x(x+x^2)-\int(1+x)dx=\ln x(x+x^2)-x-\dfrac{x^2}{2}+C.$

Задания для самостоятельного решения.

Найти интеграл интегрированием по частям:

1) $\int(7x-1)\cos x\,dx$ $\int\operatorname{arctg} x\,dx$

2) $\int(6-5x)e^x\,dx$ $\int(7x+5)\ln x\,dx$

3) $\int x\cos x\,dx$ $\int\operatorname{arcctg} x\,dx$

4) $\int(1+2x)\cos x\,dx$ $\int\arcsin x\,dx$

5) $\int(8x-1)\sin 5x\,dx$ $\int(6+5x)\ln x\,dx$

6) $\int xe^x\,dx$ $\int(3x+2)\ln x\,dx$

Контрольные вопросы:

1. Понятия первообразной и ее основные свойства.
2. Основные правила вычисления первообразной.
3. Неопределенный интеграл, его свойства.
4. Таблица неопределенных интегралов.
5. Основные правила вычисления неопределенного интеграла.
6. Методы интегрирования функции по частям.