Практическое занятие №18

Тема: «Вычисление неопределенных интегралов методом замены переменной».

Цель: совершенствование умений находить неопределенные интегралы методом замены переменной и по частям, совершенствование умений проверять действие интегрирования дифференцированием.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы
Теоретические сведения

Первообразная функции. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C,$ где C — const .

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx=F(x)+C,$ где $F'(x)=f(x), C$ — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x); \qquad d\int f(x)dx=f(x)dx;$
2. $\int dF(x)=F(x)+C;$
3. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx, \qquad k$ — const;
4. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx = \varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t = \psi(x)$.

Пример1. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

$$a)\ \int \cos 4x dx;\ \ б)\ \int e^{9x+1} dx;\ \ в) \int x(2-x^2)^5 dx$$

Решение:

$$a)\ \int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{c} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1} dx = \left| \begin{array}{c} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \dfrac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

$$в) \int x(2-x^2)^5 dx = \left| \begin{array}{c} t = 2-x^2 \\ dt = (2-x^2)' = -2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^5 dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12}(2-x^2)^6 + C.$$

Задания для самостоятельного решения.

Проинтегрировать функции заменой переменной:

1) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 3x}$ $\quad \int \dfrac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$ $\quad \int e^{1-3x} dx$

2) $\int (2x-1)\cos(x^2-x) dx$ $\quad \int x\sqrt{5+x^2} dx$ $\quad \int e^{6x+5} dx$

3) $\int 10^{2x+1} dx$ $\quad \int \sin\dfrac{x}{2} dx$ $\quad \int \dfrac{dx}{5x+3}$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10} dx$ $\int \cos 2x dx$ $\quad \int e^{\sin x}\cos x dx$

5) $\int \dfrac{dx}{x\ln x}$ $\quad \int \sin 2x dx$ $\quad \int 3^{7x-1} dx$

6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\int \sin(2-3x)dx$ $\int \frac{dx}{e^{3x}}$

Контрольные вопросы:

1. Понятия первообразной и ее основные свойства.
2. Основные правила вычисления первообразной.
3. Неопределенный интеграл, его свойства.
4. Таблица неопределенных интегралов.
5. Основные правила вычисления неопределенного интеграла.
6. Методы интегрирования функции заменой переменной.