Практическое занятие №16

Тема: «Нахождение экстремумов и точек перегиба функции».

Цель:

- исследовать функцию на экстремум с помощью 1 производной; исследовать функцию на точки перегиба с помощью 2 производной.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Теоретические сведения

<u>Алгоритм нахождения экстремумов функции.</u>

1.Найти область определения $D(y)$ функции.

2.Найти $y'(x)$, а затем решив уравнение $y'(x) = 0$ найти критические точки (то есть точки из $D(y)$в которых производная равна нулю или не существует).

3.Затем исследовать знаки производной $y'(x)$ и поведение функции y(x) методом интервалов. Если $y'(x) > 0$ на некотором интервале, то $y = f(x)$ возрастает на этом интервале, если $y'(x) < 0$ на некотором интервале, то $y = f(x)$ убывает на этом интервале.

4. Затем найти точки минимума и максимума функции , исходя из правила :

- если $y'(x)$ в критической точке x_0 меняет знак с "+" на "-" , то точка x_0 - точка максимума;
- если с "-" на "+", то x_0 - точка минимума;
- если производная знак не меняет в критической точке x_0, то x_0 не будет точкой экстремума.

Чтобы найти экстремумы функции нужно подставить значение x_0 в заданную функцию вместо **x** и найти **y**.

Пример 1. Исследовать на экстремумы функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$

1)$D(y) = R;$

2)*Найдем* $y' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}}$

Найдем критические точки из уравнения

$y' = 0; \frac{\sqrt[3]{x}-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$*; отсюда* $\sqrt[3]{x} - 2 = 0$ *а,* $3\sqrt[3]{x} \neq 0$

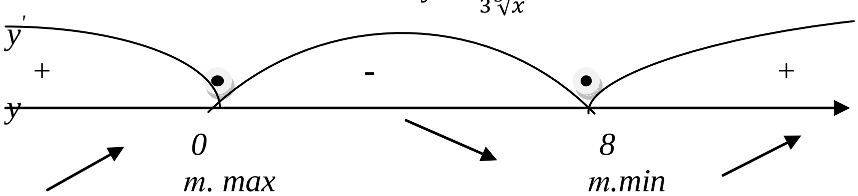
$\sqrt[3]{x} = 2$ $x \neq 0$

$x = 8$

Имеем две критические точки 0 и 8.

3)Исследуем знаки производной и поведение функции методом интервалов.

$y' = \frac{\sqrt[3]{x}-2}{3\sqrt[3]{x}}$



y_{max} *=y(0)=0*

$y_{min} = y(8) = \frac{8}{3} - \sqrt[3]{8^2} = 2\frac{2}{3} - 4 = -1\frac{1}{3}$

<u>Алгоритм нахождения выпуклости, вогнутости и точек перегиба функции y=f(x)</u>

1.Найти $D(y)$ функции.

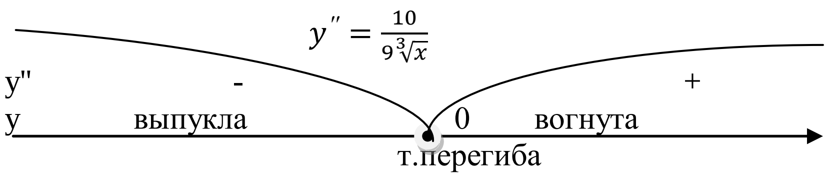
2.Найти $f''(x)$
3.Найти критические точки функции по второй производной.
4.Исследовать знак второй производной в промежутках, на которых найденные критические точки делят область определения функции.
5.Если $f''(x) < 0$ на некотором промежутке, то функция выпукла на этом промежутке, если $f''(x) > 0$ на некотором промежутке, то функция y=f(x) вогнута на этом промежутке. Если в точке X_0 - критической точке функции по второй производной $f''(x)$ меняет знак, то X_0 - точка перегиба функции.

Пример 2. Найти точки перегиба кривой f(x)=x+$\sqrt[3]{x^5} - 2$

1. $D(y) = R$

2. $y' = 1 + \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$; $y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$

$y'' = 0$; $\frac{10}{9\sqrt[3]{x}} = 0 > x \neq 0$; $x = 0$ - Критическая точка по $y''(x)$



y(0)=0+0-2=-2;

(0;-2) координаты точки перегиба функции.

Задания для самостоятельного решения.

Задание:

1)Исследовать функцию на экстремум.

2)Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

Вариант 1

1)$y = x - 6\sqrt[3]{x^2}$

2) $y = xe^{-\frac{x}{2}}$

Вариант 2

1) $y = (7 - x)\sqrt[3]{x + 5}$

2) $y = e^{x^3}$

Вариант 3

1)$y = (x^2 - 8)e^x$

2)$y = xe^{\frac{x}{2}}$

Вариант 4

1) $y = \sqrt[3]{x^2e^x}$

2) $y = e^{-x^3}$

Контрольные вопросы:

1. Что такое максимум функции?
2. Что такое минимум функции?
3. Что такое экстремум функции?
4. Необходимое условие существования экстремума функции.
5. Достаточное условие существования экстремума функции.
6. Что такое точка перегиба графика функции?

7. Необходимое условие точки перегиба графика функции.
8. Достаточное условие точки перегиба графика функции.
9. Условия выпуклости графика функции.