

## Практическая работа №15

### Исследование функции на непрерывность и точки разрыва

**Цель:** закрепить навыки исследования функции на непрерывность и точки разрыва

**Оборудование и материалы:** тетрадь, ручка.

**Время выполнения:** 2 часа

#### Содержание работы:

##### Основные понятия.

1 Функция непрерывна в точке  $k$ , если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке:  $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$

2 Определение включает условия:

– функция должна быть определена в точке  $k$ , то есть должно существовать значение  $f(k)$ ;

– должен существовать общий предел функции  $\lim_{x \rightarrow k} f(x)$ , это подразумевает существование и равенство односторонних пределов:  $\lim_{x \rightarrow k-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow k+0} f(x)$ ;

– предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке:  $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$ .

3 Если в точке  $k$  нарушено условие непрерывности и односторонние пределы конечны, но не равны, то она называется точкой разрыва первого рода

4 Если хотя бы один из пределов  $f(k-0)$  или  $f(k+0)$  не существует или равен бесконечности, то точка  $k$  называется точкой разрыва второго рода.

5 Если существуют левый и правый пределы функции в точке и они равны друг другу, но не совпадают со значением функции  $f(x)$  в точке  $k$ :  $f(k) \neq f(k-0) = f(k+0)$  или функция  $f(k)$  не определена в точке  $k$ , то точка  $k$  называется точкой устранимого разрыва

#### Задание

Исследовать функцию на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют.

#### Примеры выполнения:

## Исходные данные:

$$\text{Задание 1 } f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 1 \\ (x-1)^2; & 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x; & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{Задание 2 } f(x) = \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1}$$

$$\text{Задание 3 } f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x+4}; \quad f(x) = \frac{x+4}{2x^2 + 7x - 4}$$

$$\text{Задание 4 } f(x) = x^2 - \frac{|x+1|}{x+1} - 1$$

## Решение:

### Задание 1

Функция непрерывна на интервалах  $(-\infty; 1)$ ;  $[1; 2]$ ;  $(2; +\infty)$ . Тогда, разрыв возможен только на концах указанных промежутков, то есть в точках  $x = 1$  и  $x = 2$ . Найдем односторонние пределы и значение функции в каждой из этих точек.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^2 = 0$$

Односторонние пределы в  $x = 1$  существуют, но значения их различны, значит в точке  $x = 1$  разрыв первого рода.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x-1)^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (3-x) = 1; \quad f(2) = 1$$

Односторонние пределы и значение функции в точке  $x = 2$  равны, значит точка  $x = 2$  – точка непрерывности

### Задание 2

Функция  $f(x) = \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1}$  не определена, если  $x-3=0$  и  $x+1=0$ , т.к. эти выражения находятся в знаменателе, значит точки разрыва  $x = 3$  и  $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty$$

Односторонние пределы в  $x = 3$  равны бесконечности, значит в точке  $x = 3$  разрыв второго рода.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty$$

Односторонние пределы в  $x = -1$  равны бесконечности, значит в точке  $x = -1$  разрыв второго рода.

### Задание 3

а) Функция не определена, если  $x+4=0$ , т.к. это выражение находится в знаменателе, значит точка разрыва  $x = -4$

Разложим числитель функции  $f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x+4}$  на множители, для этого найдем корни квадратного уравнения  $2x^2 + 7x - 4 = 0$ .

$$D = 49 + 32 = 81 = 9^2; \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{4}; \quad x_1 = -4; \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 2(x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+4)(2x-1)$$

$$f(x) = \frac{(x+4)(2x-1)}{x+4} = 2x-1$$

$$\lim_{x \rightarrow -4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4-0} (2x-1) = -9; \quad \lim_{x \rightarrow -4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4+0} (2x-1) = -9$$

Существуют левый и правый пределы функции в точке  $x = -4$  и они равны друг другу, но функция  $f(x)$  не определена в точке  $-4$ , значит точка  $-4$  – точка устранимого разрыва

б) Разложим знаменатель функции  $f(x) = \frac{x+4}{2x^2 + 7x - 4}$  на множители, для этого найдем корни квадратного уравнения  $2x^2 + 7x - 4 = 0$ .

$$f(x) = \frac{x+4}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{x+4}{(x+4)(2x-1)} = \frac{1}{(2x-1)}$$

Функция  $f(x)$  не определена в точках  $-4$  и  $0,5$

Точка  $-4$  – точка устранимого разрыва, т.к.  $\lim_{x \rightarrow -4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{1}{(2x-1)} = -\frac{1}{9}$ ;

$$\lim_{x \rightarrow -4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{1}{(2x-1)} = -\frac{1}{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,5-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,5-0} \frac{1}{(2x-1)} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0,5+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,5+0} \frac{1}{(2x-1)} = \infty \Rightarrow \text{в точке } x = 0,5 \text{ разрыв}$$

второго рода.

### Задание 4

$$f(x) = x^2 - \frac{|x+1|}{x+1} - 1 = \begin{cases} x^2 - \frac{x+1}{x+1} - 1 = x^2 - 2; & x \geq -1 \\ x^2 + \frac{x+1}{x+1} - 1 = x^2; & x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2; & x \geq -1 \\ x^2; & x < -1 \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы и значение функции в каждой из этих точек.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} x^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} x^2 - 2 = -1$$

Односторонние пределы в  $x = -1$  существуют, но значения их различны, значит в точке  $x = -1$  разрыв первого рода.

### Задания для самостоятельного решения.

#### Задание 1

1	$f(x) = \begin{cases} x+2; & x < -1 \\ x^2+1; & -1 \leq x \leq 1 \\ -x+3; & x > 1 \end{cases}$	2	$f(x) = \begin{cases} x^2+1; & x \leq 0 \\ 1+2x; & 0 < x < 2 \\ x-2; & x \geq 2 \end{cases}$	3	$f(x) = \begin{cases} 2; & x < -1 \\ 2-2x; & -1 \leq x < 1 \\ \ln x; & x \geq 1 \end{cases}$
4	$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2}; & x < -2 \\ 2; & -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2x}; & x > 2 \end{cases}$	5	$f(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \operatorname{tg} x; & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ 1; & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$	6	$f(x) = \begin{cases} x^3+1; & x \leq -1 \\ 1+2x; & -1 < x < 2 \\ \frac{1}{x-2}; & x \geq 2 \end{cases}$
7	$f(x) = \begin{cases} 1; & x < -1 \\ 2+3x; & -1 \leq x < 1 \\ \ln x; & x \geq 1 \end{cases}$	8	$f(x) = \begin{cases} x^3+1; & x \leq -1 \\ 1+2x; & -1 < x < 2 \\ x-1; & x \geq 2 \end{cases}$	9	$f(x) = \begin{cases} 2; & x \leq -2 \\ x^2; & -2 < x \leq 1 \\ -2x+3; & x > 1 \end{cases}$
10	$f(x) = \begin{cases} -x+1; & x \leq -1 \\ x^2-1; & -1 \leq x \leq 2 \\ 3; & x > 2 \end{cases}$	11	$f(x) = \begin{cases} x+4; & x < -1 \\ x^2+2; & -1 \leq x < 1 \\ 2x; & x \geq 1 \end{cases}$	12	$f(x) = \begin{cases} x; & x < 0 \\ x^2; & 0 \leq x < 1 \\ x-1; & x \geq 1 \end{cases}$
13	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3) & x \leq 1 \\ 6-5x; & 1 < x < 3 \\ x-3; & x \geq 3 \end{cases}$	14	$f(x) = \begin{cases} (x-1)^4; & x < 1 \\ 7-2x; & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{3}{x-3}-4; & x > 3 \end{cases}$	15	$f(x) = \begin{cases} 1; & x < -2 \\ \frac{1}{x}; & -2 \leq x \leq 2 \\ x^2-4x+\frac{9}{2}; & x > 2 \end{cases}$
16	$f(x) = \begin{cases} -x; & x < 0 \\ 2^x; & 0 \leq x < 2 \\ 4; & x \geq 2 \end{cases}$	17	$f(x) = \begin{cases} e^x; & x \leq 0 \\ \cos x; & 0 < x \leq 2\pi \\ 10-x; & x > 2\pi \end{cases}$	18	$f(x) = \begin{cases} \cos x; & x \leq 0 \\ x^2+1; & 0 < x < 1 \\ x; & x \geq 1 \end{cases}$
19	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x < 0 \\ x^2; & 0 \leq x \leq 2 \\ 5-x; & x > 2 \end{cases}$	20	$f(x) = \begin{cases} 0; & x < \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x; & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \sin x; & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	21	$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3; & x < 1 \\ 3-2x; & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{x-2}-1; & x > 2 \end{cases}$

22	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2x^2+1) & x \leq 1 \\ 6-5x; & 1 < x < 3 \\ x+5; & x \geq 3 \end{cases}$	23	$f(x) = \begin{cases} x+2; & x \leq -2 \\ x^2-4; & -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{-x+2}; & x > 2 \end{cases}$	24	$f(x) = \begin{cases} x+1; & x < -1 \\ x^2+1; & -1 \leq x < 1 \\ \frac{3}{1-x}; & x \geq 1 \end{cases}$
25	$f(x) = \begin{cases} 2-x; & x \leq -2 \\ x^2-1; & -2 < x \leq 1 \\ -2x+3; & x > 1 \end{cases}$	26	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x < 0 \\ x^2+1; & 0 \leq x \leq 3 \\ -x+3; & x > 3 \end{cases}$	27	$f(x) = \begin{cases} (x+2)^4; & x < -2 \\ 7-2x; & -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{x-1}-2; & x > 1 \end{cases}$
28	$f(x) = \begin{cases} \cos x; & x \leq 0 \\ \sin x; & 0 < x \leq 2\pi \\ \operatorname{tg} x; & x > 2\pi \end{cases}$	29	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}; & x \leq 0 \\ x^2+1; & 0 < x \leq 3 \\ 2x+4; & x > 3 \end{cases}$	30	$f(x) = \begin{cases} x+2; & x < -2 \\ x^2+1; & -2 \leq x \leq 1 \\ -x+3; & x > 1 \end{cases}$

### Задание 2

1	$f(x) = \frac{2^{x+1}}{3-x}$	2	$f(x) = \frac{e^{1-x}}{x-2}$	3	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{4-x^2}}}{1-x}$	4	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x^2-x-2}}}{1+x}$
5	$f(x) = \frac{2^{\frac{x}{9-x^2}}}{1+x}$	6	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{1-x^2}}}{1-2x}$	7	$f(x) = 2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}}$	8	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x}}}{4-x}$
9	$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{3-x}}}{x-2}$	10	$f(x) = \frac{4^{\frac{1}{9-x^2}}}{1-x}$	11	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x^2-3x+2}}}{5+x}$	12	$f(x) = \frac{4^{\frac{1}{1-x^2}}}{4-x}$
13	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x^2-1}}}{1+2x}$	14	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-3}}}{4-x^2}$	15	$f(x) = \frac{3^{\frac{1}{1-x}}}{x-2}$	16	$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2-1}$
17	$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{3-x}}}{x-1}$	18	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x^2-3x+2}}}{1+x}$	19	$f(x) = 3^{\frac{1}{x(x^2-9)}}$	20	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-3}}}{x-x^2}$
21	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-1}}}{9-x^2}$	22	$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2-16}$	23	$f(x) = \frac{6^{\frac{1}{9-x^2}}}{6-x}$	24	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-3}}}{4-x}$
25	$f(x) = \frac{6^{\frac{1}{25-x^2}}}{6-x}$	26	$f(x) = \frac{7^{\frac{1}{2x^2+9x-18}}}{1+x}$	27	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-3}}}{1-x^2}$	28	$f(x) = \frac{7^{\frac{1}{2x^2-5x+3}}}{2+x}$
29	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-1}}}{1-4x^2}$	30	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x^2-6x-7}}}{7-x}$	31	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-1}}}{16-x^2}$	32	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x^2-3x+2}}}{1+3x}$

### Задание 3

1	$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$	2	$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 9}$	3	$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$
4	$f(x) = \frac{\cos x}{x}$	5	$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$	6	$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$
7	$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 1}$	8	$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$	9	$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$
10	$f(x) = \frac{x + 2}{x^3 + 8}$	11	$f(x) = \frac{x + 1}{2x^2 + 7x + 5}$	12	$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 9}$
13	$f(x) = \frac{x + 1}{x^3 + 1}$	14	$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$	15	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$
16	$f(x) = \frac{x - 2}{x^3 - 8}$	17	$f(x) = \frac{3x^2 - 11x + 6}{x - 3}$	18	$f(x) = \frac{\cos 3x}{3x}$
19	$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$	20	$f(x) = \frac{x^2 + 6x - 7}{x + 7}$	21	$f(x) = \frac{x - 2}{3x^2 - 5x - 2}$
22	$f(x) = \frac{4x^2 + 7x - 2}{x + 2}$	23	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	24	$f(x) = \frac{x - 4}{3x^2 - 11x - 4}$
25	$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$	26	$f(x) = \frac{x + 3}{5x^2 + 14x - 3}$	27	$f(x) = \frac{x + 4}{x^3 + 64}$
28	$f(x) = \frac{3x^2 + 8x - 3}{x + 3}$	29	$f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 16}$	30	$f(x) = \frac{x + 6}{2x^2 + 9x - 18}$

### Задание 4

1	$f(x) = x - \frac{ x - 5 }{x - 5} - 4$	2	$f(x) = \frac{ x^2 - x }{x^2 - x}$	3	$f(x) = -\frac{ 2x + 6 }{2x + 6} - x^2$
4	$f(x) = \frac{ 2x + 1 }{2x + 1} + x^2 - 2$	5	$f(x) = x^2 - \frac{ 2x - 8 }{2x - 8} - 5$	6	$f(x) = x - \frac{ 3x - 9 }{3x - 9} + 1$
7	$f(x) = -\frac{ 3x + 6 }{3x + 6} - 1$	8	$f(x) = x - \frac{ x - 7 }{x - 7} - 1$	9	$f(x) = -\frac{ x + 3 }{x + 3} - x^2 + x$
10	$f(x) = \frac{ 3x + 1 }{3x + 1} + x^2 - 1$	11	$f(x) = \frac{ x - 4 }{x - 4} + 3$	12	$f(x) = \frac{ 2x - 3 }{2x - 3} + x^2 + 1$
13	$f(x) = -\frac{ 3x + 2 }{3x + 2} - x + 1$	14	$f(x) = \frac{ x^3 - x^2 }{x^3 - x^2} + 1$	15	$f(x) = x^2 - \frac{4x + 8}{ 4x + 8 } - 5$
16	$f(x) = x^2 - \frac{3x + 2}{ 3x + 2 } - \frac{1}{9}$	17	$f(x) = \frac{ 3x - 5 }{3x - 5} + x^2 + \frac{2}{9}$	18	$f(x) = \frac{ x - 6 }{x - 6} + 3 - x$

19	$f(x) = -\frac{ x+7 }{x+7} + 2x$	20	$f(x) = x^2 - \frac{ 3x-7 }{3x-7} + \frac{1}{9}$	21	$f(x) = \frac{ 3x+4 }{3x+4} - x + \frac{1}{3}$
22	$f(x) = x^2 + \frac{2x+4}{ 2x+4 } - 5$	23	$f(x) = \frac{ x-1 }{x-1} + 3 - x$	24	$f(x) = \frac{ x^2-x }{x^2-x} + x$
25	$f(x) = x^2 - \frac{ 2x-7 }{2x-7} - 3$	26	$f(x) = x^2 - \frac{3x+8}{ 3x+8 } - \frac{1}{9}$	27	$f(x) = \frac{ x-5 }{x-5} + 2 - x$
28	$f(x) = x^2 - \frac{ 3x-5 }{3x-5} + \frac{2}{9}$	29	$f(x) = \frac{ x-1 }{x-1} + 2 - x^2$	30	$f(x) = x^3 - \frac{2x+4}{ 2x+4 } - 1$

### Контрольные вопросы:

- 1 Непрерывность функции в точке.
- 2 Условия непрерывности функции в точке.
- 3 Что такое точка разрыва первого рода?
- 4 Что такое точка разрыва второго рода?
- 5 Что такое точка устранимого разрыва?