Практическое занятие №14
Тема: «Нахождение частных производных функции двух переменных».

Цель:

- находить значения функции нескольких переменных,
- находить область определения функции нескольких переменных;
- вычислять частные производные и дифференциалы.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы
Теоретические сведения

Частной производной функции нескольких переменных по какой-нибудь переменной в рассматриваемой точке называется обычная производная по этой переменной, считая другие переменные фиксированными (постоянными).

Рассмотрим функцию двух независимых переменных $z = f(x;y)$. Придадим аргументу x приращение Δx, оставляя y неизменным. В этом случае функция получит частное приращение $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$.

Определение. Предел отношения частного приращения функции к приращению соответствующего аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ называется частной производной от z по x и обозначается следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x};\ z'_x;\ f'_x(x,y).$$

Аналогично определяется частная производная по y и вводятся ее обозначения:

$$\frac{\partial z}{\partial y};\ z'_y;\ f'_y(x,y).$$

Функция трех независимых переменных $u = f(x;y;z)$ имеет три частные производные первого порядка: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

Пример 1. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующей функции двух переменных:

$z = x^3 + 3x^2 y - y^2$.

Решение. Так как частные приращения функции получаются при изменении только одного аргумента, то для нахождения частной производной пользуются правилами дифференцирования функций одной переменной. При нахождении производной данной функции по переменной x считаем постоянной величину y; при дифференцировании по y постоянной будем считать x:

y-const - $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy$; *x-const* $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$.

Как уже отмечалось *полным приращением функции* $z = f(x;y)$ при переходе от точки M_0 к точке M называется выражение: $\Delta z = f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0)$. Если данное приращение можно представить в виде:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

где А и В не зависят от Δx и Δy, а $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)$ стремятся к нулю при стремлении к нулю Δx и Δy, то функция $z = f(x;y)$ называется дифференцируемой в точке $(x_0;y_0)$, а линейная часть $A\Delta x + B\Delta y$ приращения функции называется полным дифференциалом этой функции и обозначается dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$. Поэтому полный дифференциал записывают также в виде

$$dz = Adx + Bdy,$$

где *A* и *B* можно найти по формулам: $\frac{\partial z}{\partial x} = A$; $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $z = \frac{5x+3y}{9x-2y}$.

Решение. Находим частные производные:

y-const $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{5(9x-2y)-9(5x+3y)}{(9x-2y)^2} = \frac{45x-10y-45x-27y}{(9x-2y)^2} = -\frac{37y}{(9x-2y)^2}$;

x-const $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3(9x-2y)+2(5x+3y)}{(9x-2y)^2} = \frac{27x-6y+10+6y}{(9x-2y)^2} = \frac{37x}{(9x-2y)^2}$.

Полный дифференциал данной функции равен:

$$dz = -\frac{37y}{(9x-2y)^2}dx + \frac{37x}{(9x-2y)^2}dy.$$

При достаточно малых Δx и Δy для дифференцируемой функции $z = f(x;y)$ справедливы приближенные равенства:

$$\Delta z \approx dz \text{ и } f(x+\Delta x; y+\Delta y) = f(x;y) + dz,$$

поэтому полным дифференциалом функции двух переменным можно пользоваться при приближенных вычислениях приращений функций, используя формулу:

$$f(M_1) \approx f(M_0) + f'_x(x_0;y_0)\Delta x + f'_y(x_0;y_0)\Delta y \qquad \textbf{(1)}$$

Пример 2. Вычислить приближенное значение: $1{,}08^{3{,}96}$

Решение. Рассмотрим функцию $z = x^y$ и две точки M(1,08; 3,96) т M_0(1;4).

$f(M_0) = 1^4 = 1$, Δx =0,08, Δy =-0,04

Найдем значения частных производных в точке M_0(1;4).

y-const $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ и $f'(M_0) = 4\cdot 1^3 = 4$; x-const $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$ и $f'(M_0) = 1^4 \cdot \ln 1 = 0$.

Подставляя в формулу 1, найдем значение $1{,}08^{3{,}96}$:

$$1{,}08^{3{,}96} = 1 + 4\cdot 0{,}08 + 0\cdot(-0{,}04) = 1{,}32.$$

Частные производные функций нескольких переменных сами являются функциями этих переменных и могут иметь частные производные. для исходной функции эти последние производные будут частными производными второго порядка. Так, для функции $z = f(x; y)$ двух независимых переменных можно определить четыре частные производные второго порядка, которые обозначаются символами

$$z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\ z''_{xн} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\ z''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Частные производные $z''_{yx} = z''_{xy}$, отличающиеся порядком дифференцирования, называются *смешанными частными производными второго порядка.*

Пример 1. Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x-2y}$.
Решение. Найдем частные производные первого порядка
y-const $z'_x = e^{x-2y}$; *x-const* $z'_y = -2e^{x-2y}$.

Таким образом, частные производные второго порядка будут равны:

y-const $z''_{x^2} = e^{x-2y}$; $z''_{yx} = -2e^{x-2y}$

x-const $z''_{yx} = -2e^{x-2y}$; $z''_{y^2} = 4e^{x-2y}$.

Задания для самостоятельного решения.

1) $z = x^2 + 3xy$;
2) $z = x^2 - 2xy - y^2$;
3) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$;
4) $z = 2x^2 - 3xy^2$;
5) $z = (1-x)^y$;
6) $z = (1+xy)^x$;
7) $z = x^3y^2 + 3x\ln y + x^y$;
8) $z = x^2\sin y + y^4$;
9) $z = x^6 + y^4$
10) $z = \sqrt{x+3y}$.

Найдите значение частной производной в данной точке:

1) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$; $A(2;1)$;

2) $z = \dfrac{1-xy}{1+xy}$; $A(0;1)$.

Найдите частные производные второго порядка:

1) $z = x^3 - 3y$;
2) $z = 5x^2 + y^2$;
3) $z = e^x \ln y$;
4) $z = 4y\ln x$;
5) $z = e^{\frac{x}{y}}$;
6) $z = xe^{xe} + y$;
7) $z = \dfrac{x^2}{1-2y}$
8) $z = \cos y + (x-y)\sin x$

Контрольные вопросы:

1. Что такое функция нескольких переменных?
2. Что такое частная производная?
3. Как обозначается частная производная?

4. Что такое полный дифференциал функции?
5. Как найти частную производную?
6. Как в нахождении частной производной используются правила и формулы дифференцирования?
7. Как найти частные производные второго порядка?