Практическое занятие №13

Тема: «Исследование сложных функций с помощью производной и построение графика функции».

Цель: научиться исследовать функции методами дифференциального исчисления, строить их графики.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Теоретические сведения

Правила дифференцирования

$c' = 0$ (c – const)

$\left(f_1(x) + f_2(x)\right)' = f_1'(x) + f_2'(x)$

$\left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right)' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$

3а. $\left(cf(x)\right)' = c \cdot f'(x)$

$\left(\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \dfrac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{f_2^2(x)}$ $\quad (f_2(x) \neq 0)$

$y_x' = y_u' \cdot u_x'$, если $y = f(u),\ u = \varphi(x)$.

.

Таблица производных сложных функций

1. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$ $(n \in R)$

2. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$

3. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

6. $(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

7. $(\mathrm{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

8. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ $\quad (|u| < 1)$

9. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot u'$ $\quad (|u| < 1)$

10. $(\mathrm{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

11. $(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

12. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$ $(a > 0,\ a \in R)$

13. $e^u = e^u \cdot u'$

14. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$

15. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

Пример: Найти производные функций:

а) $y=\cos x\cdot 3^x$; б) $y=2\ln x+\sin x$; в) $y=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{\mathrm{tg}x}$.

Решение. а) Функция y – это произведение двух функций $f_1=\cos x$ и $f_2=3^x$, поэтому по третьему правилу дифференцирования:

$$y'=\left(\cos x\cdot 3^x\right)'=\left(\cos x\right)'\cdot 3^x+\cos x\cdot\left(3^x\right)'.$$

Из таблицы производных находим, что $\left(\cos x\right)'=-\sin x\cdot x'$, и так как $x'=1$, то $\left(\cos x\right)'=-\sin x$; $\left(3^x\right)'=3^x\ln 3\cdot x'=3^x\ln 3$.

Значит, $y'=-\sin x\cdot 3^x+\cos x\cdot 3^x\ln 3=3^x\left(\ln 3\cos x-\sin x\right)$.

б) $y'=\left(2\ln x+\sin x\right)'=\left(2\ln x\right)'+\left(\sin x\right)'=2\left(\ln x\right)'+\left(\sin x\right)'=2\cdot\dfrac{1}{x}\cdot x'+\cos x\cdot x'=$

$$=\frac{2}{x}+\cos x.$$

в) $y'=\left(\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{\mathrm{tg}x}\right)'=\dfrac{\left(x^2+\sqrt{x}\right)'\mathrm{tg}x-\left(x^2+\sqrt{x}\right)\left(\mathrm{tg}x\right)'}{\mathrm{tg}^2x}=$

$$=\frac{\left(2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{tg}x-\left(x^2+\sqrt{x}\right)\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\mathrm{tg}^2x}.$$

Пример: Найти производные функций:

а) $y=\mathrm{ctg}^2x$;б) $y=3\sin^5 x$;

Решение. а) Функция y – это сложная функция $u=\mathrm{ctg}x$, $y=u^2$. Тогда по формуле 1 таблицы производных $y'_x=2u\cdot u'=2\mathrm{ctg}x\left(\mathrm{ctg}x\right)'$, а по формуле 5 $\left(\mathrm{ctg}x\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot x'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.Таким образом, $y'=2\mathrm{ctg}x\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

б) Используем правило дифференцирования 3а: $y'=\left(3\sin^5 x\right)'=3\left(\sin^5 x\right)'$. Функция $\sin^5 x$ – сложная $u=\sin x$, $\sin^5 x=u^5$. Поэтому

$$y'=3\cdot 5u^4=15\sin^4 x\left(\sin x\right)'=15\sin^4 x\cdot\cos x.$$

СХЕМА ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать четность и периодичность функции.
3. Исследовать точки разрыва, найти вертикальные асимптоты.
4. Найти наклонные асимптоты (если их существование возможно).
5. Найти точки пересечения графика с осями координат.
6. Найти y'. Определить точки экстремума, интервалы возрастания и убывания функции.

7. Найти y''. Определить точки перегиба графика, интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить график функции.

ПРИМЕР. Провести полное исследование и построить график функции

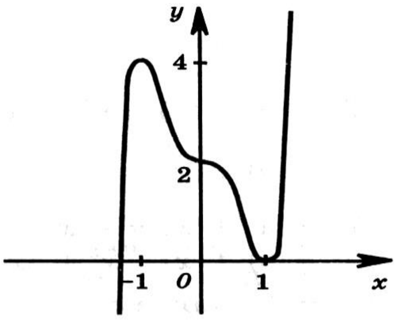
$$f(x)=3x^5-5x^3+2$$

Решение:

1) D(f)=R, так как f – многочлен
2) $f(-x)=-3x^5+5x^3+2$, значит f(x) ни чётная, ни нечётная; не периодическая
3),4) $f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x^2-1)$
D(f)=R, поэтому критических точек, для которых f'(x) не существует, нет
$f'(x)=0$, если $x^2(x^2-1)=0$, т.е. при x=0, x=-1, x=1

x	$(-\infty; -1)$	-1	(-1; 1)	0	(0;1)	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	–	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	2	↘	0	↗
		max				min	

5) Пересечение с осью Оу: $3x^5-5x^3+2=0$, отсюда x=1
6) Построение графика



Вариант 1

1. Найти производные функций:
   $а)\ y = 5x + 5x^4 - 6x^3;$
   $б)\ y = (x^2 - 1)(x^3 + 1);$
   $в)\ y = \dfrac{e^x + x}{e^x - 1};$
   $г)\ y = arctg\dfrac{2x}{1 - x^2}.$
2. Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления, начертить их графики.

   а $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5;$

   б $y = \dfrac{x+1}{x}.$

Вариант 2

1. Найти производные функций:

а) $y = 2tgx - 3\sin x;$

б) $y = \dfrac{x}{1 - x^2};$

в) $y = (2x + 1)(x^2 - 4x);$

г) $y = \ln(1 + \cos x).$

2. Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления, начертить их графики.

а $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1;$

б $y = \dfrac{x}{x - 1}.$

Вариант 3

1. Найти производные функций:

а) $y = 10x^6 - \dfrac{4}{x} + 3x;$

б) $y = arctgx + 7e^x;$

в) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^3 + 4};$

г) $y = arctg\sqrt{x}.$

2. Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления, начертить их графики.

а $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10;$

б $y = \dfrac{x - 3}{x + 2}.$

Вариант 4

1. Найти производные функций:

а) $y = 2^x + 3tgx - 2;$

б) $y = (3x + 1)\cos x;$

в) $y = \dfrac{\ln x}{2 + x};$

г) $y = tg(4x).$

2. Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления, начертить их графики.

а $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2;$

б $y = \dfrac{x + 9}{x + 4}.$

Контрольные вопросы:

1) Сформируйте правило нахождения экстремумов функции с помощью первой производной.

2) Что необходимо сделать для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке?
3) Назовите общую схему построения графиков функций.