Практическое занятие №12

Тема: «Построение графиков функций с помощью производной**».**

Цель: научиться проводить исследование функции с помощью производной и строить графики функций; закрепить основные признаки возрастания (убывания) функции, условия существования точек экстремума; проводить исследование функции по графику производной.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Схема исследования функции:

1. Находим **область определения** ***D(f)*** функции *y = f(x).*

2. Проверяем функцию на **четность.**

Если ***f(-x) = f(x),*** то функция **четная,** график функции симметричен относительно оси OY.

Если ***f(-x) = - f(x),*** то функция **нечетная,** график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

В противном случае функция является ни четной, ни нечетной.

3. Если функция **периодическая**, то находим период функции.

4. Находим **точки пересечения графика с осями координат.**

Находим **нули функции - это точки пересечения графика функции с осью абсцисс (Ox).**

Для этого мы решаем уравнение ***f(x) = 0.***

Находим **точку пересечения графика функции с осью ординат (Oy).** Для этого ищем **значение функции** при ***x=0***.

5. Находим **промежутки знакопостоянства функции**, то есть промежутки, на которых функция сохраняет знак. Это нам потребуется для контроля правильности построения графика.

Чтобы найти промежутки знакопостоянства функции, нам нужно решить неравенства ***f(x) >0*** и ***f(x) <0*** .

6. Исследуем функцию с помощью производной: находим **промежутки возрастания и убывания** функции, а также **точки максимума и минимума**.

Для этого мы следуем привычному алгоритму.

а) Находим производную $f'(x)$

б) Приравниваем производную к нулю и находим корни уравнения $f'(x) = 0$

- это стационарные точки.

в) Находим промежутки знакопостоянства производной. Промежутки, на которых **производная положительна**, являются **промежутками возрастания функции**.

Промежутки, на которых **производная отрицательна**, являются **промежутками убывания функции**.

Точки, в которых **производная меняет знак с плюса на минус**, являются **точками максимума**.

Точки, в которых **производная меняет знак с минуса на плюс**, являются **точками минимума**.

7. Найти **значения функции в точках экстремума.**

8. По данным исследования **построить график функции**.

Пример 1. Исследовать функцию и по результатам исследования построить график.

$$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$$

Решение.

1) D(f): R

2) Проверим функцию на чётность/нечётность:

$$f(-x)=(-x)^3-\frac{5}{2}\cdot(-x)^2-2\cdot(-x)+\frac{3}{2}=-x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}$$

$f(-x)\neq f(x),\ f(-x)\neq -f(x)$, значит, данная функция не является чётной или нечётной.

3) Функция непериодическая.

4) Нули функции.

С осью *Oy*:

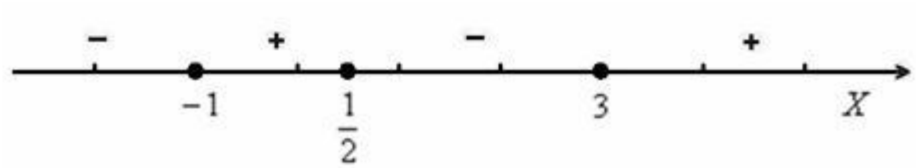
$$y=f(0)=0^3-\frac{5}{2}\cdot 0^2-2\cdot 0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Чтобы найти точки пересечения с осью Ох (нули функции) требуется решить уравнение *f(x) = 0*:

$$x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}=0$$

$$(x+1)\cdot\left(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}\right)=0$$

$$x=-1,\ x=\frac{1}{2},\ x=3$$



5) Таким образом, на интервалах $(-\infty;-1),\left(\frac{1}{2};3\right)$ график расположен ниже оси абсцисс *f(x)<0*, а на интервалах $\left(-1;\frac{1}{2}\right),(3;+\infty)$ – выше данной оси *f(x) >0*.

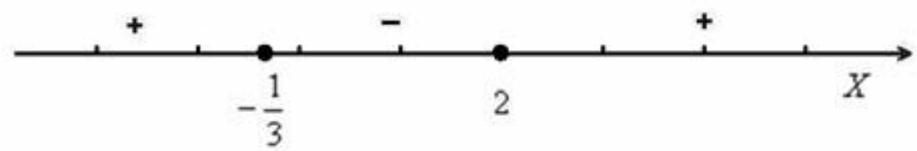
6) Возрастание, убывание.

Найдём критические точки:

$$f'(x)=\left(x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\right)'=3x^2-5x-2=0$$

$$x=-\frac{1}{3},\ x=2$$

Отложим их на числовой прямой и определим знаки производной:



Следовательно, функция возрастает на $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$ *и* $(2;+\infty)$ и убывает на $\left(-\frac{1}{3};2\right)$.

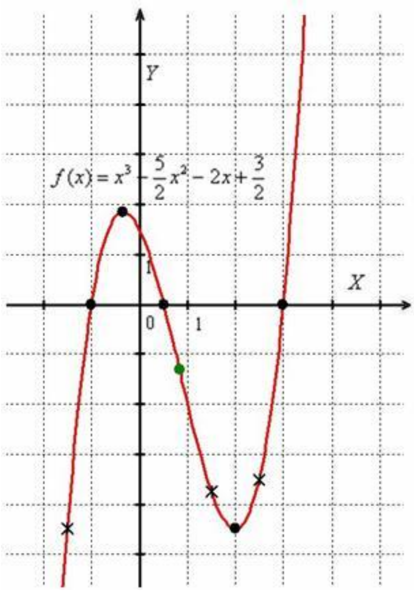
7). Экстремумы функции

$x=-\frac{1}{3}$ точка максимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «-». $x=2$ точка минимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «-» на «+».

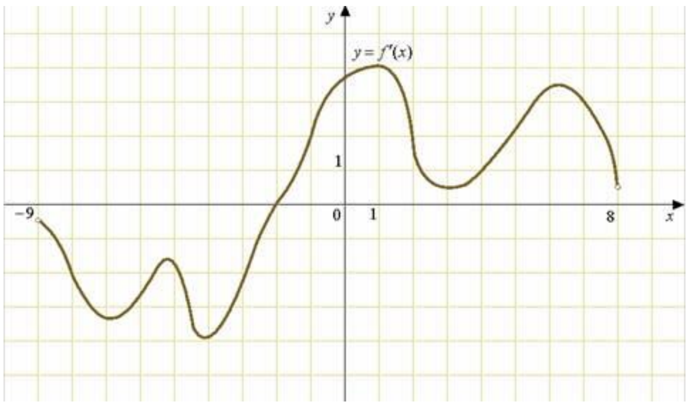
8). $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}-\frac{5}{18}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{50}{27}\approx 1{,}85$

$$f(2)=8-10-4+\frac{3}{2}=-\frac{9}{2}=-4\frac{1}{2}.$$

9) Строим график функции.



Пример 2. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. В какой точке отрезка $[-7;-3]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение.



Решение. На отрезке [-7;-3] график производной расположен ниже оси Ох, это означает, что $f'(x) < 0$, то есть сама функция на данном отрезке монотонно убывает. Таким образом, убывающая функция принимает наибольшего значения на левом конце промежутка, то есть в точке х=-7.

Ответ. -7.

<u>Алгоритм нахождения наибольшего или наименьшего значения функции на отрезке:</u>

- Найти производную функции.
- Определить критические точки (те точки, в которых производная функции обращается в ноль или не существует).
- Выбрать из найденных точек те, которые принадлежат данному отрезку.
- Вычислить значения **функции** (не производной!) в этих точках и на концах отрезка.
- Среди полученных значений выбрать наибольшее или наименьшее, оно и будет искомым.

Пример 3. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 18x^2 + 81x + 23$ на отрезке [8; 13].

Решение: действуем по алгоритму нахождения наименьшего значения функции на отрезке:

1) $y' = 3x^2 - 36x + 81$.
2) $y' = 3x^2 - 36x + 81 = 0$

   $x^2 - 12x + 27 = 0$,

   $x = 3$ и $x = 9$

3) $x = 9 \in [8; 13]$.

4) $y = x^3 - 18x^2 + 81x + 23 = x(x-9)^2+23$:

- $y(8) = 8 \cdot (8-9)^2+23 = 31$;
- $y(9) = 9 \cdot (9-9)^2+23 = 23$;
- $y(13) = 13 \cdot (13-9)^2+23 = 231$.

Ответ. $\mathbf{max}_{[8;13]}\, f(x) = 231$; $\mathbf{min}_{[8;13]}\, f(x) = 23$.

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание №1. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график			
1	$y = 4 - 2x - 7x^2$	**11**	$y = -x^2 + 5x + 4$
2	$y = 5 + 12x - x^3$	**12**	$y = -2 + 3x - x^3$
3	$y = 2x^3 + 3x^2 - 4$	**13**	$y = x^4 - 2x^2 - 3$
4	$y = 9 + 8x^2 - x^4$	**14**	$y = 6x^2 - x - 5$
5	$y = -2x^2 + x$	**15**	$y = 3x^2 - x^3$
6	$y = \frac{1}{2}x^4 - x^2$	**16**	$y = x^3 - 6x^2 - 15x - 2$
7	$y = 2x - \frac{1}{6}x^3$	**17**	$y = 4x^2 - 2x^4$
8	$y = \frac{1}{2}x^4 - 8x^2$	**18**	$y = 5x^3 - 3x^5$
9	$y = 3x^5 - 5x^3 + 2$	**19**	$y = -5x^2 - 10x$
10	$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$	**20**	$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$
Задание №2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке			
1	$3x^5 - 20x^3 + 9$, $[-10; -1]$	**11**	$x^5 + 15x^3 - 50x$, $[-5; 0]$
2	$3x^5 - 20x^3 - 8$, $[-5; 1]$	**12**	$x^5 - 10x^3 - 135x$, $[-5; 1]$
3	$3x^5 - 20x^3 - 16$, $[-3; -1]$	**13**	$y = x^3 + 16x^2 + 64x + 7$, $[-11; -7]$
4	$x^5 - 5x^3 - 20x$, $[-8; 1]$	**14**	$y = -10,5x^2 - x^3 + 22$, $[-1; 8]$
5	$x^5 + 15x^3 - 260x$, $[-10; 0]$	**15**	$y = x^3 - 2,5x^2 - 50x - 2$, $[3; 12]$
6	$y = x^3 + 9,5x^2 - 72x + 18$, $[-16; -6]$	**16**	$y = x^3 - 3,5x^2 + 4x - 23$, $[-3; 3]$
7	$3x^5 - 5x^3 + 15$, $[-4; 0]$	**17**	$y = x^3 - 9,5x^2 + 30x - 3$, $[-4; 8]$
8	$y = 5 + 12x - x^3$, $[-3; -1]$	**18**	$x^5 + 5x^3 - 140x$, $[-10; 0]$
9	$x^5 + 15x^3 - 50x$, $[-4; 0]$	**19**	$y = x^3 - 9,5x^2 - 40x - 24$, $[6; 11]$
10	$x^5 - 5x^3 - 20x$, $[-9; 1]$	**20**	$y = x^3 + 17,5x^2 + 72x + 21$, $[-13; -9]$

Контрольные вопросы:

1. Функция называется *возрастающей* в промежутке, если…
2. Функция называется *убывающей* в промежутке, если...
3. Что называется точкой минимума функции?
4. Что называется точкой максимума?
5. Что называется точками экстремума?
6. Сформируйте правило нахождения экстремумов функции с помощью первой производной.
7. Что необходимо сделать для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке?
8. Назовите общую схему построения графиков функций.