Практическое занятие №11

Тема: «Правила дифференцирования. Нахождение производных».

Цель: Научиться вычислять производные различных функций, пользуясь правилами дифференцирования и таблицей производных.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

ПРИМЕР 1: Вычислить производные данных функций, пользуясь таблицей производных и соответствующими правилами дифференцирования.

Воспользуемся правилом нахождения производной суммы-разности функций, правилом вынесения постоянного множителя за знак производной и формулой $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Помним, что производная постоянного равна нулю!

а) $f(x) = \dfrac{x^3}{9} + 4x^2 - \dfrac{x}{3} + 14\sqrt{x} + \sqrt{e^5}$, найти $f'(4)$:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{9} + 4x^2 - \frac{x}{3} + 14\sqrt{x} + \sqrt{e^5}\right)' = \frac{(x^3)'}{9} + 4(x^2)' - \frac{(x)'}{3} + 14(\sqrt{x})' + (\sqrt{e^5})' =$$

$$= \frac{3 \cdot x^2}{9} + 4 \cdot 2x - \frac{1}{3} + 14 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \underline{\frac{x^2}{3} + 8x - \frac{1}{3} + \frac{7}{\sqrt{x}}};\ f'(4)$$

$$= \frac{4^2}{3} + 8 \cdot 4 - \frac{1}{3} + \frac{7}{\sqrt{4}} = \frac{16}{3} + 32 - \frac{1}{3} + \frac{7}{2} = \frac{16-1}{3} + 32 + 3.5 = 40.5$$

б) $f(x) = \dfrac{5}{4 \cdot \sqrt[5]{x^4}} = \dfrac{5}{4 \cdot x^{4/5}} = \dfrac{5}{4} \cdot x^{-4/5}$, найти $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{5}{4 \cdot \sqrt[5]{x^4}}\right)' = \frac{5}{4} \cdot \left(x^{-4/5}\right)' = \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot x^{-4/5-1} = -1 \cdot x^{-9/5} = -\frac{1}{x^{9/5}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{x^9}}.$$

в) $f(x) = \dfrac{2}{5} \cdot ctgx - \dfrac{3 \cdot e^x}{4} + 2 \cdot 2^x - 6 \cdot \log_3 x$, найти $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{2}{5} \cdot ctgx - \frac{3 \cdot e^x}{4} + 2 \cdot 2^x - 6 \cdot \log_3 x\right)' = \frac{2}{5} \cdot (ctgx)' - \frac{3 \cdot \left(e^{x}\right)'}{4} + 2 \cdot \left(2^x\right)' - 6 \cdot \left(\log_{3} x\right)' =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) - \frac{3 \cdot e^x}{4} + 2 \cdot 2^x \cdot \ln 2 - 6 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 3} = -\frac{2}{5\sin^2 x} - \frac{3e^x}{4} + 2 \cdot 2^x \cdot \ln 2 - \frac{6}{x \cdot \ln 3}.$$

ПРИМЕР 2: Вычислить производные данных функций, пользуясь соответствующими правилами дифференцирования:

а) $f(x) = \cos x \cdot \sqrt[4]{x}$, найти $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\cos x \cdot \sqrt[4]{x}\right)' = \left| \begin{array}{c} (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \\ u = \cos x \quad u' = -\sin x \\ v = \sqrt[4]{x} = x^{1/4} \quad v' = 1/4 \cdot x^{1/4-1} = 1/4 \cdot x^{-3/4} = \dfrac{1}{4x^{3/4}} = \dfrac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}} \end{array} \right| =$$

$$= -\sin x \cdot \sqrt[4]{x} + \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}} \cdot \cos x = -\sin x \cdot \sqrt[4]{x} + \frac{\cos x}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}}.$$

б) $f(x)=\dfrac{4^x}{3\sin x}$, найти $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{4^x}{3\sin x}\right)'=\left|\begin{array}{l}\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}\\ u=4^x \quad u'=(4^x)'=4^x\cdot\ln 4\\ v=3\sin x \quad v'=3(\sin x)'=3\cos x\end{array}\right|=\frac{4^x\cdot\ln 4\cdot 3\sin x-3\cos x\cdot 4^x}{(3\sin x)^2}=$$

$$=\frac{4^x\cdot 3\cdot(\sin x\cdot\ln 4-4^x\cdot\cos x)}{9\sin^2 x}=\frac{4^x\cdot(\sin x\cdot\ln 4-4^x\cdot\cos x)}{3\sin^2 x}.$$

ПРИМЕР 3: Решить уравнение: $f'(x)=f'(5)-f'(1)$, если $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x-3}$.

Решение:

1) $$f'(x)=\left(\frac{x^2+2x+1}{x-3}\right)'=\left|\begin{array}{l}\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}\\ u=x^2+2x+1\; u'=2x+2\\ v=x-3\; v'=1\end{array}\right|=\frac{(2x+2)(x-3)-1\cdot(x^2+2x+1)}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-6x+2x-6-x^2-2x-1}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x-7}{(x-3)^2}=\left|\begin{array}{l}D=36+28=64\\ x_1=\dfrac{6+8}{2}=7\; x_2=\dfrac{6-8}{2}=-1\end{array}\right|=\frac{(x-7)(x+1)}{(x-3)^2}$$

.

2) $f'(5)=\dfrac{(5-7)(5+1)}{(5-3)^2}=\dfrac{-2\cdot 6}{4}=-3$, $f'(1)=\dfrac{(1-7)(1+1)}{(1-3)^2}=\dfrac{-6\cdot 2}{4}=-3$,

$$f'(5)-f'(1)=-3-(-3)=0,$$

3) Имеем уравнение: $f'(x)=f'(5)-f'(1)\Rightarrow\ \dfrac{(x-7)(x+1)}{(x-3)^2}=0\Rightarrow\begin{cases}(x-7)(x+1)=0\\ (x-3)^2\neq 0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}x=7\quad \text{или}\quad x=-1\\ \qquad x\neq 3\end{cases}$. Ответ: -1 или 7.

ПРИМЕР 4. Решить неравенство: $f(x)\cdot f'(x)\le 0$, если $f(x)=x^2-4x+3$.

Решение: 1) $f'(x)=\left(x^2-4x+3\right)'=2x-4$.

2) Имеем неравенство: $\left(x^2-4x+3\right)\cdot(2x-4)\le 0$. Неравенство степени больше второй решается методом интервалов.

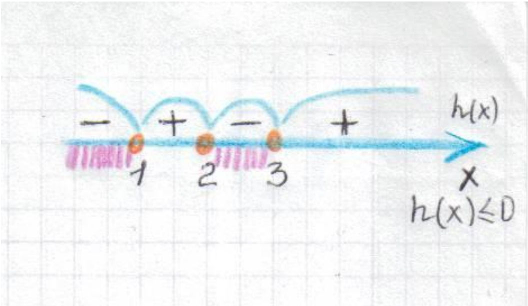
Пусть $h(x)=\left(x^2-4x+3\right)\cdot(2x-4)$. Нули функции: $\left(x^2-4x+3\right)\cdot(2x-4)=0\Rightarrow$

$x^2-4x+3=0$

$D=16-12=4$ или $\begin{array}{l}2x-4=0\\ x=2\end{array}$

$x_1=\dfrac{4+2}{2}=3\; x_2=\dfrac{4-2}{2}=1$

Отметим найденные значения на оси Ох и определим знаки на полученных интервалах:



$h(0) = (0^2 - 0 + 3)\cdot(0-4) = -12 < 0$

Корни не повторяются – знаки чередуются.

Ответ: $x \in (-\infty;1] \cup [3;+\infty)$

ПРИМЕР 5. Найти $f(x)$, если известна её производная $f'(x)$: $f'(x) = 10x^3 + 5\sin x - \dfrac{3}{x^2}$.

Решение: определим производной какого выражения является каждое слагаемое функции: $f_1'(x) = 10x^3 \rightarrow f_1(x) = 2.5x^4$, $f_2'(x) = 5\sin x \rightarrow f_2(x) = -5\cos x$,

$f_3'(x) = -\dfrac{3}{x^2} \rightarrow f_4(x) = \dfrac{3}{x}$.

Значит, $f(x) = 2.5x^4 - 5\cos x + \dfrac{3}{x}$.

Задания для самостоятельного решения:

Задание 1. Вычислить производные данных функций, пользуясь таблицей производных и соответствующими правилами дифференцирования.

а) $f(x) = 4x^3 - \dfrac{x^2}{4} + 2x - 6\sqrt{x} + \sqrt{3}$, найти $f'(4)$; б) $f(x) = \dfrac{7}{6\cdot\sqrt[7]{x^6}}$, найти $f'(x)$;

в) $f(x) = 3\cos x - ctgx$, найти $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$; г) $f(x) = 2^x - 3\ln x + e^3$, найти $f'(x)$;

д) $f(x) = 3\log_2 x - \dfrac{1}{x}$, найти $f'(x)$.

Задание 2. Вычислить производные данных функций, пользуясь соответствующими правилами дифференцирования:

а) $f(x) = (x^2 - 1)(x^4 + 2)$, найти $f'(x)$; б) $f(x) = \dfrac{x^3}{2x+1}$, найти $f'(-1)$;

в) $f(x) = \dfrac{\ln x}{2x^4} - e^2$, найти $f'(1)$; г) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$, найти $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Задание 3. Решить уравнение: $f'(x) = 0$, если $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x+2}$.

Задание 4. Решить неравенство: $f'(x) \geq 0$, если $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + 6x$.

Задание 5. Найти $f(x)$, если известна её производная $f'(x)$: $f'(x) = 5x^4 - 1 + \dfrac{9}{2\sqrt{x}}$.

Задание 6.* $f(x) = 2x^3 + \dfrac{2}{3}x - 4\sqrt{x} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{2\sqrt[3]{x}} - 6x^3\cdot\sqrt[3]{x^2} - 0.5$. Найти $f'(x)$.

Контрольные вопросы:

1. Запишите определение производной;
2. Как называется операция нахождения производной?
3. Запишите формулы производной произведения и частного;
4. Найдите производные следующих функций: $y = x^{100}$, $y = 100^x$, $y = \log_{100} x$;
5. Производная какой функции равна $y' = -4x^{-5}$?