

Тема 1. Предмет теории вероятностей.

Вопросы для самопроверки

1. Что подразумевается в теории вероятностей под терминами *опыт* и *эксперимент*?
2. Какие события называются *случайными*?
3. Какие случайные события называются *невозможными, достоверными*?
4. Приведите статистическое определение вероятности.
5. Приведите классическое определение вероятности.
6. Приведите классическое определение вероятности.
7. Приведите формулы для числа перестановок из n элементов, числа сочетаний и размещений из n элементов по m элементов.

Задания для самостоятельной работы

1. Владелец пластиковой карточки забыл все цифры четырехзначного кода. Найти вероятность того, что двух попыток, предоставляемых банкоматом, хватит для того, чтобы отгадать забытый код.
2. В розыгрыше лотереи участвуют 100 билетов, среди которых 25 выигрышных. Какова вероятность остаться без выигрыша, приобретя 3 билета лотереи?
3. В выборный орган избрали 8 человек. Сколькими способами они могут распределить между собой обязанности председателя, заместителя и секретаря?
4. За одним столом надо рассадить 5 юношей и 5 девушек так, чтобы не было двух рядом сидящих юношей и двух рядом сидящих девушек. Сколькими способами можно это сделать?

Тема 2. Теоремы сложения и умножения.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему сложения вероятностей, объясните её геометрический смысл для двух событий.
2. Какие события называются совместными, а какие несовместными?
3. Какие события называются независимыми?
4. Дайте определение условной вероятности.
5. Сформулируйте теорему умножения вероятностей, объясните её геометрический смысл.

Задания для самостоятельной работы

1. Вероятность того, что в течение 5 лет каждая из четырех деталей механизма выйдет из строя, равна 0,5; 0,4; 0,3 и 0,1. Какова вероятность того, что механизм прослужит 5 лет?

2. Достаточным условием сдачи коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, предлагаемых преподавателем студенту. Студент не знает ответов на 8 вопросов из тех 40, которые могут быть предложены. Какова вероятность сдачи коллоквиума?

3. В лотерее 10 билетов с выигрышем и 15 билетов без выигрыша. Студент вытаскивает 5 билетов. Какова вероятность того, что три билета из пяти с выигрышем?

Тема 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Вопросы для самопроверки

1. Какие события называют гипотезами?
2. Напишите формулу полной вероятности и опишите, условия в которых она применима.
3. Напишите формулу Байеса.
4. Почему эта формула называется формулой уточнения гипотез?

Задания для самостоятельной работы

1. Имеется два ящика с шарами. В первом – 2 белых и 4 черных шара, во втором – 1 белый и 7 черных шаров; наудачу выбирается один ящик и из него вынимается шар. Какова вероятность, что вынутый шар: а) белый? б) черный?
2. В торговую фирму поступают телевизоры от трёх фирм изготовителей в соотношении 2:5:3. Телевизоры, поступающие от первой фирмы, требуют ремонта в течение гарантийного срока в 15% случаев, от второй и третьей – соответственно в 8% и 6% случаев. Найти вероятность того, что проданный телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока.
3. Система состоит из двух элементов с надёжностями p_1 и p_2 соответственно. Элементы соединены параллельно и выходят из строя независимо друг от друга. Работоспособность системы сохраняется, если работает хотя бы один элемент. Система работает. Найти вероятность того, что неисправен первый элемент.

Тема 4. Последовательности испытаний. Схема Бернулли.

Вопросы для самопроверки

1. Какие испытания (события) называют независимыми?
2. Опишите условия испытаний, известные как испытания по схеме Бернулли.
3. Напишите формулу Бернулли.
4. Вероятность какого события находится по формуле Бернулли?

Задания для самостоятельной работы

Изготовлено 50 изделий, из которых 20 изделий высшего сорта. Определить вероятность того, что хотя бы четыре изделия из 10 проверяемых окажутся высшего сорта.

Тема 5. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему Пуассона.
2. В каком случае применяется теорема Пуассона?
3. Сформулируйте локальную теорему Муавра-Лапласа.
4. Сформулируйте интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Задания для самостоятельной работы

1. Средний процент невозвращения в срок кредита, выдаваемого банком, составляет 5%. Найти вероятность того, что при выдаче банком 100 кредитов проблемы с возвратом денег возникнут не менее, чем в двух случаях. Предполагается, что различные кредиты выдаются и возвращаются независимо друг от друга.
2. Пряжильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,002. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет более чем на трех веретенах.

Тема 6. Случайные величины. Дискретные случайные величины.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение понятия «случайная величина».
2. Какие типы случайных величин рассматриваются в теории вероятностей?
3. Какие случайные величины называются дискретными?
4. Что такое закон распределения случайной величины?
5. В какой форме задается закон распределения для дискретной случайной величины?
6. Что такое функция распределения случайной величины? Как эта функция выглядит для дискретной случайной величины?
7. Какие числовые характеристики случайной величины знаете? Как они определяются для дискретной случайной величины?
8. Как определить с помощью функции распределения вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?
9. Какие виды распределений дискретных случайных величин знаете?
10. Что такое биномиальное распределение дискретной случайной величины?

11. Опишите распределение Пуассона.

Задания для самостоятельной работы

1. Известно, что случайная величина X , принимающая два значения $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, имеет математическое ожидание, равное 2,2. Построить ряд распределения случайной величины X , найти дисперсию и построить график функции распределения.

2. Вероятность того, что в течение часа на станцию скорой помощи не поступит ни одного вызова, равна 0,00248. Считая, что число X вызовов, поступивших в течение часа на станцию, имеет распределение Пуассона, найти математическое ожидание и дисперсию X .

1. Сделано два высокорискованных вклада – 20 млн. руб. в компанию А и 18 млн. руб. в компанию В. Компания А обещает 40% годовых, но может обанкротиться с вероятностью 0,3, компания В обещает 30% годовых, но может обанкротиться с вероятностью 0,2. Допустим, что банкротства компаний независимы. Составить ряд распределения случайной величины X , равной сумме вкладов, полученных от двух компаний через год. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

Тема 7. Непрерывные случайные величины.

Вопросы для самопроверки

1. Какие случайные величины называются непрерывными?
2. Дайте определение плотности распределения? Какими свойствами обладает плотность распределения?
3. Как определяются числовые характеристики для непрерывной случайной величины?
4. Как определить с помощью функции распределения вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?
5. Как определить с помощью плотности распределения вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?

Задания для самостоятельной работы

1. Плотность распределения случайной величины X задана функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ ce^{-\alpha x}, & \text{при } x > 0 (\alpha > 0). \end{cases}$$

Найти:

- 1) значение параметра c ; 2) найти функцию распределения $F(x)$;
- 3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
- 4) найти математическое ожидание случайной величины;
- 5) найти дисперсию случайной величины.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ x^2, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти:

- 1) найти плотность распределения $f(x)$;
- 2) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
- 3) найти математическое ожидание случайной величины;
- 4) найти дисперсию случайной величины;
- 5) найти вероятность того, что случайная величина принимает значение из интервала $(0,5; 0,8)$.

Тема 8. Основные типы распределений непрерывных случайных величин.

Вопросы для самопроверки

1. Какие виды распределений непрерывных случайных величин знаете?
2. Что такое равномерное распределение?
3. Выведите числовые характеристики равномерного распределения.
4. Охарактеризуйте показательное распределение.
5. Какое распределение называют нормальным?
6. Что называют интегралом Лапласа?
7. Как, пользуясь таблицей значений интеграла Лапласа, вычислить вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в некоторый интервал?

Задания для самостоятельной работы

1. Даны функции: $f(x) = -x^2$; 2) $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2}$; 3) $f_3(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Являются ли эти функции плотностями вероятности?

2. Если соблюдается график движения, то среднее время ожидания пассажиром трамвая равно 3,5 минуты. Известно, что время ожидания имеет равномерный закон распределения. Минимальное время ожидания равно 0. Найти вероятность того, что пассажир будет ожидать трамвай от двух до пяти минут.
3. Время ремонта и обслуживания автомобиля после одной поездки случайно и имеет экспоненциальный закон распределения. Было замечено, что в текущем сезоне на ремонт и обслуживание автомобиля после одной поездки тратилось в среднем 5 минут. Найти вероятность того, что при очередной поездке это время не превысит 30 минут.
4. Рост взрослого мужчины удовлетворительно описывается нормальным законом распределения. По статистике средний рост составляет 175 см, а

среднеквадратическое отклонение равно 7 см. Найти вероятность того, что рост наугад взятого мужчины будет отличаться от среднего роста не больше чем на 7 см.

5. Случайная величина распределена нормально. Найти $P(35 < X < 40)$, если $M(X) = 25$, а $P(15 < X < 35) = 0,4$.

6. Случайная величина распределена нормально. Найти $P(1 < X < 6)$, если

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}.$$

Тема 9. Числовые характеристики случайных величин.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое начальные и центральные моменты различных порядков?
2. С какими моментами связаны математическое ожидание и дисперсия?
3. С помощью каких числовых характеристик описывается отличие конкретного распределения от нормального?
4. Что такое мода, медиана?
5. Что характеризует эксцесс?

Задания для самостоятельной работы

1. Страховая компания заключает однотипные договоры, причём страховая премия (сумма, выплачиваемая страховщиком при заключении договора) составляет 4 тыс. рублей. При наступлении страхового случая компания должна выплатить 20 тыс. рублей. Известно, что страховой случай наступает в 4% случаев. Фирме удалось застраховать 200 клиентов. Ответить на вопросы:

- а) Каков средний доход фирмы и среднеквадратическое отклонение дохода фирмы?
- б) Какова вероятность того, что доход фирмы будет находиться в пределах от 710 до 750 тыс. рублей?

Тема 10. Системы случайных величин.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое двумерная случайная величина?
2. Как задается функция распределения двумерной случайной величины?
3. Что такое ковариация случайных величин?
4. Что такое коэффициент корреляции случайных величин? Перечислите основные свойства коэффициента корреляции.
5. Что такое условное математическое ожидание?
6. Объясните, как построить линию регрессии Y на X .

Задания для самостоятельной работы

1. Двухмесячные объёмы продаж продукции некоторого предприятия удовлетворительно описываются двумерным случайным вектором с плотностью распределения вероятности

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & \text{если } x \in [100, 150], y \in [50, 100], \\ 0 & \text{если } x \notin [100, 150], y \notin [50, 100]. \end{cases}$$

Найти:

- константу c ;
- функцию распределения $F(x, y)$;
- исследовать случайные величины X и Y на независимость.

Тема 11. Понятие о различных формах закона больших чисел.

Вопросы для самопроверки

- Какие утверждения принято называть «законом больших чисел»?
- Сформулируйте центральную предельную теорему Лапласа.
- Сформулируйте теорему, известную как «неравенство Чебышева».

Тема 12. Математическая статистика. Основные понятия и определения.

Вопросы для самопроверки

- Какие задачи рассматриваются в математической статистике?
- Что такое генеральная совокупность?
- Что называется выборкой из генеральной совокупности?
- Какое различие между выборкой и вариационным рядом?
- Опишите понятия: полигон частот, полигон относительных частот, гистограмма.
- Что такое теоретическая и эмпирическая функции распределения?
- Как построить эмпирическую функцию распределения?
- Как находятся выборочное среднее и выборочная дисперсия?

Задания для самостоятельной работы

1. По выборке:

x_i	2	7	10	19
n_i	5	9	15	3

найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, исправленную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленное среднее квадратическое отклонение.

Тема 13. Классификация оценок. Точечное и интервальное оценивание параметров.

Вопросы для самопроверки

1. Какая оценка неизвестного параметра теоретического распределения называется состоятельной? Приведите пример состоятельной оценки.
2. Какая оценка неизвестного параметра теоретического распределения называется несмещенной?
3. Что значит, что оценка является эффективной?
4. Что является критерием состоятельности оценки?
5. Как доказать, что оценка является несмещенной?
6. Как находятся точечные оценки математического ожидания и дисперсии?
7. Являются точечные оценки математического ожидания и дисперсии состоятельными и несмещенными?
8. Что такое доверительный интервал?
9. Что такое доверительная вероятность?
10. Как строится доверительный интервал для математического ожидания?

Тема 14. Проверка статистических гипотез.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое «статистическая гипотеза»?
2. Какую гипотезу называют нулевой, какую – конкурирующей?
3. Какие ошибки относят к ошибкам первого рода, какие – второго рода?
4. Что такое статистический критерий?
5. В каком случае гипотеза принимается, в каком – отвергается?
6. Что такое «критерий согласия»?
7. Какая случайная величина рассматривается в качестве критерия при проверке гипотезы о распределении генеральной совокупности?