

Практическое занятие № 9

Вычисление вероятностей для непрерывной случайной величины. Нахождение функции плотности и интегральной функции распределения.

Цель: научиться определять вероятности значений непрерывных случайных величин по функции распределения; научиться определять плотность распределения непрерывных случайных величин по функции распределения и наоборот.

Норма времени: 2 часа.

Оборудование: тетрадь, ручка.

Порядок выполнения работы.

Случайную величину называют **непрерывной**, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$.
 $f(x) = F'(x)$

Пример 1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X . Найти плотность распределения $f(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sin x & \text{при } 0 < x \leq \pi/2 \\ 1 & \text{при } x > \pi/2 \end{cases}$$

Решение. Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0', & \text{при } x < 0 \\ (\sin x)', & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1', & \text{при } x > \pi/2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \cos x & \text{при } 0 < x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{при } x > \pi/2 \end{cases}$$

Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в полуинтервале $[a, b)$, можно найти, используя функцию распределения и плотность распределения.

При вычислении такой вероятности по функции распределения, используется формула $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Пример 2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1 \\ x/4 + 1/4 & \text{при } -1 < x \leq 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[0, 2)$:

Решение. Так как по условию (вторая строка) на полуинтервале $[0, 2)$ $F(x) = x/4 + 1/4$, то

$$P(0 \leq X < 2) = F(2) - F(0).$$

$$F(2) - F(0) = (2/4 + 1/4) - (0/4 + 1/4) = 1/2.$$

Получим $P(0 \leq X < 2) = 1/2$.

Для нахождения вероятности попадания случайной величины в интервал по плотности распределения, используется формула $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx$.

Пример 3. Задана плотность вероятности случайной величины X . Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[0,5; 1)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Решение. Искомая вероятность

$$P(0,5 \leq X < 1) = \int_{0,5}^1 2x dx = \left. \frac{2x^2}{2} \right|_{0,5}^1 = x^2 \Big|_{0,5}^1 = 1 - 0,25 = 0,75$$

Зная плотность распределения можно найти функцию распределения по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Пример 4. Случайная величина задана плотностью распределения. Найти: функцию распределения.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ (\sin x)/2 & \text{при } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{при } x > \pi \end{cases}$$

Решение

1. Если $-\infty < x \leq 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$.

2. Если $0 < x \leq \pi$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \frac{\sin x}{2} dx = 0 + \left(-\frac{\cos x}{2} \right) \Big|_0^x = -\frac{\cos x}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2}$$

3. Если $x > \pi$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2} dx + \int_{\pi}^x 0 dx = 0 + \left(-\frac{\cos x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} + 0 = -\frac{\cos \pi}{2} - \left(-\frac{\cos 0}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ответ: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ (1 - \cos x)/2 & \text{при } 0 < x \leq \pi \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$

Пример 5. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ равна $f(x) = a \cdot \cos(x)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр a .

Решение.

Если функция $f(x)$ представляет собой плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, заданной на интервале (a, b) , то выполняется условие $\int_a^b f(x) dx = 1$

$$\text{Найдем } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cdot \cos x dx = a \cdot \sin(x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = a(1 + 1) = 2a$$

Приравняем результат к единице: $2a = 1$. Таким образом, искомый параметр $a = \frac{1}{2}$.

Задания для выполнения:

	I вариант	II вариант
1.	Случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2 \\ 0,5x - 1, & \text{при } 2 < x \leq 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ а) Найти плотность распределения $f(x)$. б) Построить график функций $F(x)$ и $f(x)$ в) Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $[3; 5)$ двумя способами: – по функции $F(x)$ – по функции $f(x)$	Случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2 \\ (x - 2)^2, & \text{при } 2 < x \leq 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ а) Найти плотность распределения $f(x)$. б) Построить график функций $F(x)$ и $f(x)$ в) Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $[2, 1; 2, 5)$ двумя способами: – по функции $F(x)$ – по функции $f(x)$
2.	Дана функция распределения непрерывной случайной величины X $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sin 2x & \text{при } 0 < x \leq \pi/4 \\ 1 & \text{при } x > \pi/4 \end{cases}$ Найти плотность распределения $f(x)$.	Дана функция распределения непрерывной случайной величины X $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sin 4x & \text{при } 0 < x \leq \pi/8 \\ 1 & \text{при } x > \pi/8 \end{cases}$ Найти плотность распределения $f(x)$.
3.	Задана плотность распределения. Найти функцию распределения. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ (\cos x), & \text{если } 0 < x \leq \pi/2 \\ 0, & \text{если } x > \pi/2 \end{cases}$	Задана плотность распределения. Найти функцию распределения. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq \pi/4 \\ 2\sin 2x, & \text{если } \pi/4 < x \leq \pi/2 \\ 0, & \text{если } x > \pi/2 \end{cases}$
4.	Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = (3/2)\sin 3x$ в интервале $(0, \pi/3)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\pi/6, \pi/4)$.	Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = (6/5)\sin 3x$ в интервале $(0, \pi)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\pi/6, \pi/4)$.
5*.	Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $(0, \pi/3)$ равна $f(x) = a \cdot \sin(3x)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр a.	Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $(0, \pi/2)$ равна $f(x) = a \cdot \sin(2x)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр a.

Таблица синусов и косинусов

Угол x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	2π
Sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
Cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Контрольные вопросы:

1. Какими формулами связаны функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины?
2. По каким формулам можно найти вероятность попадания непрерывной случайной величины в полуинтервал [a,b)?