Практическое занятие № 8:
Вычисление основных числовых характеристик ДСВ.

Цель: научиться определять математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины по заданному распределению.
Норма времени: 2 часа.
Оборудование: тетрадь, ручка.

Порядок выполнения работы.
Характеристики дискретной случайной величины

1) **Математическим ожиданием M (X)** дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений величины X на соответствующие вероятности: $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$.

Рассмотрим <u>свойства математического ожидания</u>:

1. Математическое ожидание имеет ту же размерность, что и сама случайная величина.

2. Математическое ожидание может быть как положительным, так и отрицательным числом.

3. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной, т.е. $M(C) = C$.

4. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, т.е.
$M(X + Y + \ldots + W) = M(X) + M(Y) + \ldots + M(W)$.

5. Математическое ожидание произведения двух или нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин, т.е. $M(XY) = M(X) \times M(Y)$.

6. Математическое ожидание произведения случайной величины на постоянную C равно произведению математического ожидания случайной величины:
$M(CX) = C \times M(X)$.

2) **Дисперсией D (X)** дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания: $D(X) = M\,[X - M(X)]^2$.

Формула D(X) после возведения в степень и преобразований имеет вид:
$D(X) = M\,(X^2) - [M(X)]^2$.

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины.

<u>Свойства дисперсии</u>:

1. Дисперсия постоянной величины всегда равна нулю: $D(C) = 0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: $D(CX) = C^2\,D(X)$.

3. Дисперсия алгебраической суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсией: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

3) Средним квадратическим отклонением s (X) случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Среднее квадратическое отклонение имеет ту же размерность, что и случайная величина.

Случайная величина называется центрированной, если математическое ожидание $M(X)=0$, и стандартизированной, если $M(X)=0$ и среднее квадратическое отклонение $s=1$.

Пример 1. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $s(X)$ дискретной случайной величины X, заданной законом распределения в таблице 1:

Таблица 1

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. Математическое ожидание X вычисляется по формуле:

$$M(X) = -5\times 0{,}4 + 2\times 0{,}3 + 3\times 0{,}1 + 4\times 0{,}2 = -0{,}3.$$

Дисперсия вычисляется по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

Закон распределения X^2 представлен в таблице 2:

Таблица 2

X^2	25	4	9	16
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Математическое ожидание X^2:

$$M(X^2) = 25\times 0{,}4 + 4\times 0{,}3 + 9\times 0{,}1 + 16\times 0{,}2 = 15{,}3.$$

Искомая дисперсия:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 15{,}3 -(-0{,}3)^2 = 15{,}21.$$

Тогда среднее квадратическое отклонение будет:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9.$$

Пример 2. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	5	2	4
P	0,6	0,1	0,3

Y	7	9
P	0.8	0.2

Найти математическое ожидание случайной величины XY.

Решение.

$M(X) = 5*0{,}6 + 2*0{,}1 + 4*0{,}3 = 4{,}4$

$M(Y) = 7*0{,}8 + 9*0{,}2 = 7{,}4$

$M(XY) = 4{,}4*7{,}4=32{,}56$

Пример 3. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1= 0{,}4$; $p_2= 0{,}3$; $p_3 = 0{,}6$. Найти математического ожидание общего числа попаданий.

Решение. Число попаданий при первом выстреле есть случайная величина X_1, которая может принимать только два значения: 1 – попадание с вероятностью 0,4 и 0 – промах с вероятностью 0,6.

$M(X_1) = 0{,}4$

Аналогично $M(X_2) = 0{,}3$; $M(X_3) = 0{,}6$.

Общее число попаданий есть случайная величина, состоящая из суммы попаданий в каждом из выстрелов: $X=X_1+X_2+X_3$.

$M(X) = M(X_1+X_2+X_3) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) = 1{,}3$ попаданий.

Пример 4. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия p=0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение. Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно, искомое математическое ожидание M(X) = np = 10*0.6 = 6 попаданий.

Пример 5. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание M(X): M (X)=2*0,1+3*0,6+5*0,3+3,5
Математическое ожидание $M(X^2)=4*0{,}1+9*0{,}6+25*0{,}3=13{,}3$

Искомая дисперсия: $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=13{,}3-(3{,}5)^2=1{,}05$

Задания для индивидуальной работы:

Задание №1. Найдите математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение δ (X).

Вариант 1.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,1	0,1	0,09	0,3	0,009	0,3	0,001

Вариант 2.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,2	0,3	0,2	0,06	0,1	0,006	0,1	0,034

Вариант 3.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,3	0,1	0,005	0,1	0,005	0,3	0,09

Вариант 4.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,2	0,4	0,1	0,002	0,1	0,09	0,1	0,008

Вариант 5.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,2	0,1	0,008	0,2	0,09	0,3	0,002

Вариант 6.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,3	0,2	0,1	0,003	0,2	0,095	0,1	0,002

Задание №2. Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения. Найти математическое ожидание произведения M (XY) и M (2Y).

Вариант 1.

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Вариант 2.

X	2	1
p	0,6	0,4

Y	1	1,25
p	0,8	0,2

Вариант 3.

X	3	2
p	0,7	0,3

Y	0,65	2
p	0,5	0,5

Вариант 4.

X	1	3
p	0,1	0,9

Y	1	1,35
p	0,4	0,6

Вариант 5.

X	2	4
p	0,4	0,6

Y	2	1,85
p	0,8	0,2

Вариант 6.

X	1	4
p	0,5	0,5

Y	0,4	1
p	0,9	0,1

Задание №3.

Вариант 1. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,6 p_2=0,4, p_3=0,5 и p_4=0,7. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 2. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,3 p_2=0,4, p_3=0,6 и p_4=0,5. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 3. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,1 p_2=0,2, p_3=0,6 и p_4=0,9. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 4. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,7 p_2=0,2, p_3=0,8 и p_4=0,5. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 5. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,5 p_2=0,4, p_3=0,9 и p_4=0,2. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 6. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,3 p_2=0,7, p_3=0,3 и p_4=0,5. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Задание №4.

Вариант 1. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 10 деталей.

Вариант 2. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,3. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 12 деталей.

Вариант 3. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,7. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 15 деталей.

Вариант 4. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,9. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 18 деталей.
Вариант 5. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,8. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 6 деталей.
Вариант 6. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 20деталей.

Задание №5
Вариант 1. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,7.
Вариант 2. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 130 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,6
Вариант 3. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 150 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,2.
Вариант 4. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 200 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,4.
Вариант 5. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 400 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,8.
Вариант 6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 250 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,3.

Задание №6
Вариант 1. Случайная величина X может принимать два возможных значения x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем $x_2 > x_1$. Найти x_1 и x_2, зная, что M (X) = 2,7 и D (X) = 0,21.
Вариант 2. Случайная величина X может принимать два возможных значения x_1 с вероятностью 0,4 и x_2 с вероятностью 0,6, причем $x_1 > x_2$. Найти x_1 и x_2, зная, что M (X) = 3,4 и D (X) = 0,24.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение математического ожидания
2. Что показывает дисперсия случайной величины?
3. Как найти среднее квадратичное отклонение?