

Практическое занятие № 5: Нахождение апостериорной вероятности.

Цель: научиться вычислять вероятность событий, используя формулы полной вероятности и Байеса.

Норма времени: 2 часа.

Оборудование: тетрадь, ручка.

Порядок выполнения работы.

Теоретические сведения

Если событие **A** может произойти только при выполнении одного из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые образуют полную группу несовместных событий — вероятность события **A** вычисляется по **формуле полной вероятности**:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$$

Вновь рассмотрим полную группу несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, вероятности появления которых $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$. Событие **A** может произойти только вместе с каким-либо из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые называются **гипотезами**. Тогда по формуле полной вероятности: если событие **A** произошло — это может изменить вероятности гипотез $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$.

По теореме умножения вероятностей:

$$P(AB_1) = P(B_1)P(A|B_1) = P(A)P(B_1|A) \quad \text{откуда} \quad P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}$$

Аналогично, для остальных гипотез:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Эта формула называется **формулой Байеса**. Вероятности гипотез называются апостериорными вероятностями (вероятности после опыта), тогда как вероятности осуществления гипотез — априорными вероятностями.

Пример. Одного из трех стрелков вызывают на линию огня, он производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго — 0,5; для третьего — 0,8. Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

Как рассуждаем:

1. Возможны три гипотезы:

- A_1 — на линию огня вызван первый стрелок,
- A_2 — на линию огня вызван второй стрелок,
- A_3 — на линию огня вызван третий стрелок.

2. Так как вызов на линию огня любого стрелка равно возможен, то $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$.

3. В результате опыта наблюдалось событие B — после произведенных выстрелов мишень не поражена. Условные вероятности этого события при наших гипотезах равны:

$$P(B|A_1) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49;$$

$$P(B|A_2) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25;$$

$$P(B|A_3) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$$

4. По формуле Байеса находим вероятность гипотезы A_1 после опыта:

$$P(A_1|B) = \frac{0,49 \cdot 1/3}{1/3 \cdot 0,49 + 1/3 \cdot 0,25 + 1/3 \cdot 0,04} = \frac{0,49}{0,78} = 0,628.$$

Ответ: 0,628.

Задания для индивидуальной работы:

Вариант 1.

Обозначить событие A и гипотезы событий. Вычислить вероятность событий.

1. В тире имеется пять винтовок, вероятности попадания из которых соответственно равны 35, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8 и 0,9. Стрелок берет наудачу одну из винтовок. Найти вероятность попадания в цель.

2. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом 20 белых шаров, во втором — 10 белых и 10 черных, в третьем — 20 черных шаров. Из наугад выбранного ящика вынут белый шар. Какова вероятность того, что этот шар из второго ящика?

3. С первого станка-автомата на сборочный конвейер поступает 18% деталей, со 2-го и 3-го — по 25% и 57% соответственно. Вероятности выдачи бракованных деталей составляют для каждого из них соответственно 0,25%, 0,35% и 0,15%. Найдите вероятность того, что поступившая на сборку деталь окажется бракованной, а также вероятности того, что она изготовлена на 1-м, 2-м и 3-м станках-автоматах, при условии, что она оказалась бракованной.

4. Из 10 каналов радиосвязи 6 защищены от воздействия помех. Вероятность того, что защищенный канал в течение времени t не выйдет из строя равна 0,95, для незащищенного канала — 0,8. Найти вероятность того, что случайно выбранные два канала не выйдут из строя в течение времени t , причем оба канала не защищены от воздействия помех.

Вариант 2.

Обозначить событие A и гипотезы событий. Вычислить вероятность событий.

1. В цехе работает 20 станков, изготавливающих одинаковые детали: 10 станков 1-го типа, 6 станков – 2-го типа, 4 станка – 3-го типа. Вероятность того, что деталь окажется годной, для станков этих типов соответственно равны 0,9, 0,8, 0,7. Какова вероятность, что наугад взятая деталь окажется годной? Какова вероятность, что эта годная деталь изготовлена на станке 1-го типа?

2. Была проведена одна и та же контрольная работа в трех группах. В первой группе из 30 обучающихся 8 выполнили работу на «отлично», во второй из 28 «отличных» работ 6, в третьей группе из 27 обучающихся выполнили работу на «отлично» 9. Найти вероятность того, что наудачу взятая работа окажется «отличной».

3. Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 23 белых шара, во втором – 9 белых и 14 черных шаров, в третьем – 23 черных шара. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Найдите вероятность того, что шар вынут из второго ящика.

4. Фермер поручил двум охотникам застрелить волка, пообещав им в случае успеха 3500 рублей. Первый, более опытный, охотник попадает в зверя с вероятностью 0,9, второй - с вероятностью 0,6. Охотники встретили волка и одновременно выстрелили. Волк был поражен 36 одной пулей. Как охотники должны разделить премию?

Вариант 3.

Обозначить событие A и гипотезы событий. Вычислить вероятность событий.

1. Обследовалась группа из 1000 человек в возрасте свыше 60 лет. Оказалось, что 4000 человек являются постоянными курильщиками. У 1800 курящих обнаружили серьезные изменения в легких. Среди некурящих изменения в легких имели 1500 человек. Какова вероятность, что наугад обследованный человек, имеющий изменения в легких, является курящим?

2. Укупорка банок с томатным соком производится двумя автоматами, продукция которых поступает на общий конвейер. Производительность второго автомата в 1,5 раза выше производительности первого. Доля банок с дефектами составляет 0,5% у первого и 0,02% - у второго. Какова вероятность того, что взятая наугад банка сока будет иметь дефект.

3. В среднем из 100 клиентов банка 53 обслуживаются первым операционистом и 47 – вторым. Вероятности того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением, только самим операционистом, составляет 0,58 и 0,88 соответственно для первого и второго служащих банка. Какова вероятность, что клиент, для обслуживания которого потребовалась помощь заведующего, был направлен к первому операционисту?

4. В урне лежат 5 белых и 10 черных шаров, во второй 2 белых и 7 черных. Из первой урны наудачу переложили один шар во вторую урну, после чего из второй урны наудачу достают один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый? Шар, взятый из второй урны, оказался белым. Какова вероятность, что из первой урны во вторую был переложен белый шар?

Вариант 4.

Обозначить событие A и гипотезы событий. Вычислить вероятность событий.

1. В продажу поступают телевизоры с трех заводов: 30% - с первого, 20% - со второго, 50% - с третьего. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытыми дефектами, второго – 10%, третьего – 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор?

2. Партия деталей содержит 20% деталей, изготовленных первым заводом, 30% - заводом 2, 50% - заводом 3. Для заводов вероятности бракованной детали соответственно равны 0,05, 0,01, 0,06. Какова вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется бракованной? Чему равна вероятность, что она изготовлена заводом 1, 2, 3?

3. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в соотношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем $\frac{2}{5}$ сообщений «точка» и $\frac{1}{3}$ сообщений «тире» (искажение сигнала приводит к тому, что «точка» принимается как «тире», а «тире» как «точка»). Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если: а) принят сигнал «точка», б) принят сигнал «тире».

4. Электrolампы изготавливаются на трех заводах. 1-й завод производит 30% общего количества ламп, 2-й – 55%, а 3-й – остальную часть. Продукция 1-го завода содержит 1% бракованных ламп, 2-го – 1,5%, 3-го – 2%. В магазин поступает продукция всех трех заводов. Купленная лампа оказалась с браком. Какова вероятность того, что она произведена 2-м заводом?

Домашнее задание.

На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

Контрольные вопросы:

1. Объяснить смысл вероятностей, входящих в формулу полной вероятности.
2. Когда применяется формула Байеса?