Практическое занятие № 3:
Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики.

Цель: научиться применять формулы комбинаторики для нахождения вероятностей событий.

Порядок выполнения работы.

ЗАДАНИЕ №1. Разберите примеры решения задач ниже.

<u>**Пример 1.**</u> В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 3 шара, найти вероятность того, что они будут:
а) все белыми, б) все одного цвета, в) ровно два черных.

Решение: **общее количества исходов**: всего в урне: 15 + 5 + 10 = 30 шаров, извлекаем три шара. Нам не важно в какой последовательности появятся эти шары. Найдем, сколько всего существует способов извлечь из урны 3 шара: сочетания 3 из 30

$$n = C_{30}^{3} = \frac{30!}{3! \cdot 27!} = \frac{28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 14 \cdot 29 \cdot 10 = 4060 \text{ способов всего}$$

Таким образом, общее число исходов: *n=4060*

а) Рассмотрим событие: А – «из урны будут извлечены 3 белых шара». Данному событию благоприятствуют <u>m элементарных</u> исходов – в урне всего 15 белых шаров, извлечь все три белых можно (сочетания 3 из 15) $m = C_{15}^{3} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13 \cdot 7 \cdot 5 = 455$ способами.
поэтому по классическому определению:
$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{455}{4060} \approx 0{,}11$ – вероятность того, что из урны будут извлечены 3 белых шара.

б) Событие В –«из урны будут извлечены три шара одного цвета» - означает, что все три шара будут ЛИБО белые, ЛИБО красные, ЛИБО черные. Сначала подсчитаем, сколькими способами из урны можно по отдельности извлечь три красных и три черных шара, так как три белых шара могут быть извлечены 455 способами (см. пункт а)

3 красных шара - (сочетания 3 из 5) $C_{5}^{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 2 \cdot 5 = 10$ сп.

3 черных шара - (сочетания 3 из 10) $C_{10}^{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120$ сп.

Так как в этом условии работает логическая связка ИЛИ, по правилу сложения получаем, что три белых, или три красных, или три черных шара можно извлечь 455+10+120 =585 способами, это и будет число m- благоприятных исходов.
$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{585}{4060} \approx 0{,}14$ – вероятность того, что из урны будут извлечены 3 шара одного цвета.

в) Событие С –«из урны будут извлечены l два черных шара» - означает, что два шара будут черные, а третий ЛИБО красный, ЛИБО белый. Таким образом нас устраивает комбинации: <u>2 черных И 1 красный</u> ИЛИ <u>2 черных И 1 белый</u>. Сначала подсчитаем, сколькими способами из урны можно извлечь два черных шара:

2 черных шара- (сочетания 2 из 10) $C_{10}^{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 9 \cdot 5 = 45$ сп.

1 белый шар можно извлечь $C_{15}^{1} = 15$ способами,
1 красный - $C_{5}^{1} = 5$ способами.
2 черных И 1 белый – $45 \cdot 15 = 675$ сп.
2 черных И 1 красный – $45 \cdot 5 = 225$ сп.
2 черных И 1 белый ИЛИ 2 черных И 1 красный- 675+225=900 сп.

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{900}{4060} \approx 0{,}22$ – вероятность того, что из урны будут извлечены ровно 2 черных шара.

Пример 2 .Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60-ти. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3-х вопросов?

Решение: итак, расклад таков: всего 60 вопросов, среди которых 25 «хороших» и, соответственно, 60 – 25 = 35 «плохих». Ситуация шаткая и не в пользу студента. Давайте узнаем, насколько хороши его шансы:

$$C_{60}^3 = \frac{60!}{57! \cdot 3!} = \frac{58 \cdot 59 \cdot 60}{6} = 34220$$

способами можно выбрать 3 вопроса из 60-ти *(общее количество исходов)*.

Для того чтобы сдать экзамен, нужно ответить на 2 **или** 3 вопроса. Считаем благоприятствующие комбинации:

$$C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 = \frac{25!}{23! \cdot 2!} \cdot 35 = \frac{24 \cdot 25}{2} \cdot 35 = 10500$$

способами можно выбрать 2 «хороших» вопроса **и** один «плохой»;

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{22! \cdot 3!} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{6} = 2300$$

способами можно выбрать 3 «хороших» вопроса.

По **правилу сложения комбинаций**:

$$C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3 = 10500 + 2300 = 12800$$

способами можно выбрать благоприятствующую для сдачи экзамена комбинацию 3-х вопросов *(без разницы с двумя или тремя «хорошими» вопросами)*.

По классическому определению:

$$p = \frac{C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3}{C_{60}^3} = \frac{12800}{34220} = \frac{640}{1711}$$

– вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Ответ: $\frac{640}{1711} \approx 0{,}37$

Пример 3. Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков:

а) будет равно семи;

б) окажется не менее 20-ти;

в) будет чётным.

Решение: найдём общее количество исходов:

$C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$ способами могут выпасть цифры на 2-х кубиках.

а) Рассмотрим событие: A – при броске двух игральных костей произведение очков будет равно семи. Для данного события не существует благоприятствующих исходов, по классическому определению вероятности:

$$P(A) = \frac{0}{36} = 0$$

, т.е. это событие является невозможным.

б) Рассмотрим событие: B – при броске двух игральных костей произведение очков окажется не менее 20-ти. Данному событию благоприятствуют следующие исходы:

$20\ \text{очков}:\quad (4,5);\ (5,4)$

$24\ \text{очка}:\quad (4,6);\ (6,4)$

$25\ \text{очков}:\quad (5,5)$

$30\ \text{очков}:\quad (5,6);\ (6,5)$

$36\ \text{очков}:\quad (6,6)$

Итого: 8 .По классическому определению:

$P(B)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$ – искомая вероятность.

в) Рассмотрим противоположные события:

C – произведение очков будет чётным;

$\overline{C}$ – произведение очков будет нечётным.

Перечислим все исходы, благоприятствующие событию $\overline{C}$:

$1\ \text{очко}:\quad (1,1)$

$3\ \text{очка}:\quad (1,3);\ (3,1)$

$5\ \text{очков}:\quad (1,5);\ (5,1)$

$9\ \text{очков}:\quad (3,3)$

$15\ \text{очков}:\quad (3,5);\ (5,3)$

$25\ \text{очков}:\quad (5,5)$

Итого: 9 благоприятствующих исходов.

По классическому определению вероятности: $P(\overline{C})=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

Противоположные события образуют полную группу, поэтому:

$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ – искомая вероятность.

Ответ: а) 0, б) $\frac{2}{9}$, в) $\frac{3}{4}$

Пример 4. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

Решение: Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где n - число всех возможных элементарных исходов, m - число элементарных исходов, благоприятствующих осуществлению события.

Число различных перестановок с повторениями из букв А, К, К, Л, У равно $\frac{5!}{1!2!1!1!}=\frac{1*2*3*4*5}{1*2}=60$, из них только одна соответствует слову "кукла" (m=1), поэтому по классическому определению вероятности вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла" равна P=1/60.

Ответ: 1/60.

ЗАДАНИЕ №2. Решите следующие задачи:

1. Группа туристов, состоящая из 12 юношей и 8 девушек, выбирает дежурных в составе 4 человек. Какова вероятность, что среди них будут 2 девушки?

2. В урне находится 10 шаров, из них 6 белых и 4 черных шара. Вынули из урны 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара - белые?

3. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

4. Из 5 букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал их в произвольном порядке. Найдите вероятность того, что у него получится слово «книга».

5. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

6. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

7. В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара.

8. В ящике находится 15 качественных и 5 бракованных деталей. Наудачу извлекаются 2 детали. Найти вероятность того, что:

   а) обе детали будут качественными;
   б) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной;
   в) обе детали бракованные.