Практическое занятие № 12
Применение центральной предельной теоремы при решении задач.

Цель: научиться решать задачи на применение центральной предельной теоремы.
Норма времени: 2 часа.
Оборудование: тетрадь, ручка.

Порядок выполнения работы.
Краткая теория

Центральная предельная теорема в грубой формулировке выглядит так: *если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному*.

Сформулируем более точно.

Теорема. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ –. независимые случайные величины с математическими ожиданиями $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, причем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |X_k - m_k|^3}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2}} = 0$$
,

то при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ неограниченно приближается к нормальному.

Теорема Лапласа. Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p, тогда при больших n справедливо приближенное равенство

$$P\left(\alpha < \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

где Yn – число появлений события A в n опытах; $q = 1 - p$; $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Теорема Лапласа позволяет находить приближенно вероятности значений биномиально распределенных случайных величин при больших значениях величины n. Однако при этом, вероятность p не должна быть ни достаточно маленькой, ни достаточно большой.

Для практических задач часто используется другая форма записи формулы (2.2), а именно

$$P(\alpha < Y_n < \beta) \approx \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Пример 1. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0,2. Определить вероятность того, что среди 50 наугад выбранных деталей бракованных окажется не менее 6.

Для того, чтобы воспользоваться теоремой Муавра - Лапласа найдем математическое ожидание и дисперсию количества бракованных деталей в 50 – ти отобранных:

$m_x = np = 50 \cdot 0{,}2 = 10$

$D_x = npq = 50 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 8$

Фактически в задаче требуется определить вероятность того, что бракованных деталей будет не менее шести, но и, очевидно, не более 50- ти.

$$P(6 \le X \le 50) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{50-10}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{6-10}{\sqrt{16}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(10) + \Phi(1)\right) = 0{,}5 \cdot (1 + 0{,}8427) = 0{,}92135$$

Значения функции Лапласа находятся по таблице. Конечно, значения функции Лапласа Ф(10) в таблице нет, но т. к. в таблицах указано, что Ф(3)=1,0000, то все значения от величин, превышающих 3 также равны 1. Дополнительно см. Функция Лапласа.

Пример 2. Известно, что 60% всего числа изготавливаемых заводом изделий являются изделиями первого сорта. Приемщик берет первые попавшиеся 200 изделий. Чему равна вероятность того, что среди них окажется из от 120 до 150 изделий первого сорта?

Вероятность того, что деталь окажется первого сорта, равна, очевидно, 0,6.

Математическое ожидание числа изделий первого сорта равно:

$m_x = np = 200 \cdot 0{,}6 = 120$

По теореме Муавра - Лапласа получаем:

$$P(120 \le X \le 150) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{150-120}{\sqrt{96}}\right) - \Phi\left(\frac{120-120}{\sqrt{96}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(3{,}0619) + \Phi(0)\right) = 0{,}5 \cdot (1 + 0) = 0{,}5$$

Пример 3. Проверкой установлено, что 96% изделий служат не меньше гарантируемого срока. Наугад выбирают 15000 изделий. Найти вероятность того, что со сроком службы менее гарантируемого будет от 570 до 630 изделий.

Вероятность того, что срок службы изделия будет менее гарантированного равна:

1 – 0,96 = 0,04

Математическое ожидание числа таких изделий равно $m_x = np = 15000 \cdot 0{,}04 = 600$

По теореме Муавра - Лапласа получаем:

$$P(570 \le X \le 630) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{630-600}{\sqrt{1152}}\right) - \Phi\left(\frac{570-600}{\sqrt{1152}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(0{,}88) - \Phi(-0{,}88)\right) =$$

$$= \Phi(0{,}88) = 2\overline{\Phi}(1{,}25) = 2 \cdot 0{,}3944 = 0{,}7888$$

Задания для выполнения:

I вариант

Задача 1. Автоматический токарный станок настроен на выпуск деталей со средним диаметром 2.00 см и со средним квадратическим отклонением 0.005 см. Действует нормальный закон распределения. Компания технического сервиса рекомендует остановить станок для технического обслуживания и корректировки в случае, если образцы деталей, которые он производит, имеют средний диаметр более 2.01 см, либо менее 1.99 см.

1) Найти вероятность остановки станка, если он настроен по инструкции на 2.00 см.

2) Если станок начнет производить детали, которые в среднем имеют слишком большой диаметр, а именно, 2.02 см, какова вероятность того, что станок будет продолжать работать?

Задача 2. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 1,06 кг. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 1 кг. Каков процент коробок, масса которых превышает 940 г?

Задача 3. Дневная добыча угля в некоторой шахте распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 870 тонн и стандартным отклонением 90 тонн.

а) Найдите вероятность того, что в определенный день будут добыты по крайней мере 900 тонн угля.

б) Определите долю рабочих дней, в которые будет добыто от 860 до 940 тонн угля.

в) Найдите вероятность того, что в данный день добыча угля окажется ниже 750 тонн.

Задача 4. Станок изготовляет шарики для подшипников. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,5 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением σ=0,25мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

Задача 5. С.в. Y распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 2, и средним квадратическим отклонением, равным 1. Пусть X=2Y+. Найдите вероятности P(X>10), P(2<X<5), P(X=3).

Напишите функции плотности и распределения для X и постройте их графики. Как выглядит правило «трех сигм» для с.в. X?

II вариант

Задача 1. Рост мальчиков возрастной группы 15 лет есть нормально распределённая случайная величина X с параметрами a=161 см и σ=4 см.

1) Найти функцию плотности вероятности случайной величины X и построить её график.

2) Какую долю костюмов для мальчиков, имеющих рост от 152 до 158 см, нужно предусмотреть в объёме производства для данной возрастной группы.

3) Сформулировать правило трёх сигм для случайной величины X.

Задача 2. В нормально распределенной совокупности 15% значений x меньше 12 и 40% значений x больше 16.2. Найти среднее значение и стандартное отклонение данного распределения.

Задача 3. Требуется найти вероятности того, что нормально распределённая случайная величина $X\in N(a,\sigma)$, где a=4 - математическое ожидание, σ=5- среднее квадратичное отклонение случайной величины XX, принимает значения:

а) в интервале (2,8);

б) меньшее 2;

в) большее 8;

г) отличающееся от своего математического ожидания по абсолютной величине не больше чем на 10%.

Задача 4. Случайная величина X распределена по нормальному закону N[−1,2]N[−1,2]. Вычислить

1) вероятность того, что $X\in[-6,1]$

2) вероятность того, что при пяти испытаниях три раза $X \in [M, M+D]$.

Задача 5. Плотность распределения вероятностей нормальной случайной величины X имеет вид $f(x)=\gamma e{-}x2+6x+3$. Требуется найти:

А) неизвестный параметр γ, Б) математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$,

В) вероятность попадания случайной величины X в интервал (3, 4),

Г) вероятность выполнения неравенства $|X-M[X]|<0.2$.

Контрольные вопросы:

1. Назначение центральной предельной теоремы
2. Условия применимости теоремы Ляпунова.
3. Отличие леммы и теоремы Чебышева.