

Практическое занятие № 11

Применение предельных неравенств и закона больших чисел при решении задач.

Цель: научиться решать задачи на закон больших чисел.

Норма времени: 2 часа.

Оборудование: тетрадь, ручка.

Порядок выполнения работы.

Краткая теория

Следующие утверждения и теоремы составляют содержание группы законов, объединенных общим названием *Закон больших чисел*.

Лемма 1 (неравенство Маркова). Пусть X — неотрицательная случайная величина, т. е. $X \geq 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}, \text{ или } P(X \leq \varepsilon) > 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$$

Где $M(X)$ — математическое ожидание X .

Пример 1. Оценить вероятность того, что в течение ближайшего дня потребность в воде в населенном пункте превысит 150 000 л, если среднесуточная потребность в ней составляет 50 000 л.

Решение. Используя неравенство Маркова в виде $P(X > \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$, получим

$$P(X > 150000) \leq \frac{50000}{150000} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $P(X > 150000) \leq \frac{1}{3}$.

Пример 2. Среднее число солнечных дней в году для данной местности равно 90. Оценить вероятность того, что в течение года в этой местности будет не более 240 солнечных дней.

Решение. Согласно неравенству $P(X \leq \varepsilon) > 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$, имеем

$$P(X \leq 240) > 1 - \frac{90}{240} = 1 - 0,375 = 0,625.$$

Ответ: $P(X \leq 240) > 0,625$.

Лемма 2 (неравенство Чебышева). Для любой случайной величины X , имеющей конечную дисперсию и любого $\varepsilon > 0$

$$P(|X - M(X)| \leq \varepsilon) > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \text{ или } P(|X - M(X)| > \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Пример 3. Длина изготавливаемых деталей является случайной величиной, среднее значение которой 50 мм. Среднеквадратичное отклонение этой величины равно 0,2 мм. Оценить вероятность того, что отклонение длины изготовленной детали от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0,4 мм.

Решение. Для оценки вероятности используем неравенство Чебышева

$$P(|X - M(X)| \leq \varepsilon) > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

$$P(|X - 50| \leq 0,4) > 1 - \frac{0,2^2}{0,4^2} = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Ответ: $P(|X - 50| \leq 0,4) > 0,75$.

Пример 4. Среднесуточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 20 000 кВт/ч, а среднеквадратичное отклонение — 200 кВт/ч. Какого потребления электроэнергии в этом населенном пункте можно ожидать в ближайшие сутки с вероятностью, не меньшей 0,96?

Решение. Воспользуемся неравенством Чебышева $P(|X - M(X)| \leq \varepsilon) > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$. Подставим в правую часть неравенства вместо $D(X)$ величину $200^2 = 40000$, сделаем ее большей или равной 0,96:

$$1 - \frac{40\,000}{\varepsilon^2} \geq 0,96 \leftrightarrow \frac{40\,000}{\varepsilon^2} \leq 0,04 \leftrightarrow \varepsilon^2 \geq \frac{40\,000}{0,04}, \varepsilon \geq 1000.$$

Следовательно, в этом населенном пункте можно ожидать с вероятностью не меньшей 0,96 потребление электроэнергии $20\,000 \pm 1000$, т. е. $X \in [19\,000; 21\,000]$.

Ответ: от 19 000 до 21 000.

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями $M(X_1), M(X_2), \dots, M(X_n)$ и дисперсиями $D(X_1), D(X_2), \dots, D(X_n)$, ограниченными одной и той же постоянной $D(X_n) \leq C$, то какова бы ни была постоянная $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)| < \varepsilon) = 1.$$

При доказательстве предельного равенства используется неравенство

$$P(|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

Которое вытекает из неравенства Чебышева.

Пример 5. За значение некоторой величины принимают среднеарифметическое достаточно большого числа ее измерений. Предполагая, что среднеквадратичное отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 5 мм, оценить вероятность того, что при 1000 измерений неизвестной величины отклонение принятого значения от истинного по абсолютной величине не превзойдет 0,5 мм.

Решение. Воспользуемся неравенством

$$P(|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

По условию $n = 1000, \varepsilon = 0,5, C = 5^2 = 25$. Итак, искомая вероятность

$$P(|\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} X_i - \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} M(X_i)| < 0,5) \geq 1 - \frac{25}{1000 * 0,25} = 0,9$$

Ответ: $P \geq 0,9$

Частными случаями теоремы Чебышева являются теоремы Бернулли и Пуассона.

Теорема Бернулли. При неограниченном увеличении числа независимых опытов частота появления $\frac{m}{n}$ некоторого события A сходится по вероятности к его вероятности $P = P(A)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

Где ε — сколь угодно малое положительное число.

При доказательстве теоремы Бернулли получаем такую оценку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \text{ которая применяется на практике.}$$

Теорема Пуассона. Если производится n независимых опытов и вероятность появления события A в k -м опыте равна p_k , то при увеличении n частота $\frac{m}{n}$ события A сходится по вероятности к среднеарифметическому вероятностей p_k :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

Где ε — сколь угодно малое положительное число. При доказательстве этой теоремы используется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

Имеющее практическое применение.

Пример 6. При контрольной проверке изготавливаемых приборов было установлено, что в среднем 15 шт. из 100 оказывается с теми или иными дефектами. Оценить вероятность того, что доля приборов с дефектами среди 400 изготовленных будет по абсолютной величине отличаться от математического ожидания этой доли не более чем на 0,05.

Решение. Воспользуемся неравенством

$$P \left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

По условию $n = 400, \varepsilon = 0,05$. В качестве P возьмем величину, полученную при проверке для доли брака $p = \frac{15}{100} = 0,15$.

Итак,

$$P \left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{0,15 \cdot 0,85}{400 \cdot 0,05^2} = 0,8725.$$

Ответ: $P \geq 0,8725$.

Пример 7. Вероятность того, что изделие является качественным, равна 0,9. Сколько следует проверить изделий, чтобы с вероятностью не меньшей 0,95 можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения доли качественных изделий от 0,9 не превысит 0,01?

Решение. Воспользуемся неравенством

$$P \left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

По условию $p = 0,9, q = 1 - 0,9 = 0,1, \varepsilon = 0,01$. Подставим в правую часть вышеприведенного неравенства эти значения

$$1 - \frac{0,9 \cdot 0,1}{n \cdot 0,0001} \geq 0,95 \Leftrightarrow \frac{900}{n} \leq 0,05 \Leftrightarrow n \geq 18\,000.$$

Ответ: $n \geq 18\,000$.

Задания для выполнения:

I вариант

1. Случайная величина X распределена по следующему закону:

X	2,1	2,3	2,5	2,8	3,1	3,3	3,6	3,9	4,0
P	0,05	0,09	0,10	0,12	0,14	0,20	0,16	0,10	0,04

Оценить вероятность того, что она примет значение, не превышающее 3,6, пользуясь законом распределения и неравенством Маркова.

2. Технический контролер проверяет партию однотипных приборов. С вероятностью 0,01 прибор имеет дефект A и, независимо от этого, с вероятностью 0,02 — дефект B . В каких границах будет заключено практически наверняка число бракованных изделий в партии из 1000 шт., если за вероятность практической достоверности принимается 0,997?

3. Вероятность изготовления нестандартной радиолампы равна 0,04. Какое наименьшее число радиоламп следует отобрать, чтобы с вероятностью 0,88 можно было утверждать, что доля нестандартных радиоламп будет отличаться от вероятности изготовления нестандартной радиолампы по абсолютной величине не более чем на 0,02?

4. Произведено 500 независимых испытаний; в 200 из них вероятность появления события A была равна 0,4, в 180 — 0,5 и в 120 — 0,6. Оценить снизу вероятность того, что отклонение частоты от средней вероятности не превысит по абсолютной величине 0,05.

5. Из 5000 произведенных испытаний в 2000 вероятность появления события A равна 0,2, в 1400 — 0,5 и в 1600 — 0,6. Найти границы, в которых должна находиться частота появления события A , если это необходимо гарантировать с вероятностью 0,95.

6. Среднее значение скорости ветра у земли в данном пункте равно 16 км/ч. Оценить вероятность того, что в этом пункте скорость ветра (при одном наблюдении) не превысит 80 км/ч.

7. Среднее квадратическое отклонение ошибки измерения курса самолета $\sigma = 2^\circ$. Считая математическое ожидание ошибки измерения равным нулю, оценить вероятность того, что ошибка при данном измерении курса самолета будет более 5° .

8. За значение некоторой величины принимают среднеарифметическое достаточно большого числа ее измерений. Предполагая, что среднее квадратическое отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 5 мм, оценить вероятность того, что при 1000 измерений неизвестной величины отклонение принятого значения от истинного по абсолютной величине не превзойдет 0,5 мм.

9. Среднее квадратическое отклонение каждой из 450 000 независимых случайных величин не превосходит 10. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднеарифметической этих случайных величин от среднеарифметической их математических ожиданий не превзойдет 0,02.

II вариант

1. Средний вес клубня картофеля равен 150 г. Оценить вероятность того, что наудачу взятый клубень картофеля весит не более 500 г?

2. Оценить вероятность того, что в партии из 5000 изделий отклонение частоты бракованных деталей от вероятности 0,02 быть бракованной деталью превысит 0,01.

3. В рассматриваемом технологическом процессе в среднем 75 % изделий имеет допуск ± 5 %. Какое число изделий из партии в 200 000 шт. с вероятностью 0,99 можно планировать с допуском ± 5 %?

4. Стрельба ведется поочередно из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из каждого орудия равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6. Таким образом произведено 600 выстрелов. Оценить снизу вероятность того, что отклонение частоты от средней вероятности не превзойдет по абсолютной величине 0,05.

5. Выборочным путем требуется определить средний рост мужчин двадцатилетнего возраста. Какое количество мужчин, отобранных случайным образом, нужно измерить, чтобы с вероятностью, превышающей 0,98, можно было утверждать, что средний рост у отобранной группы будет отличаться от среднего роста всех двадцатилетних мужчин по абсолютной величине не более чем на 1 см. Известно, что среднеквадратичное отклонение роста для каждого мужчины из отобранной группы не превышает 5 см.

6. Среднее потребление электроэнергии за май населением одного из микрорайонов Минска равно 360 000 кВт/ч. Оценить вероятность того, что потребление электроэнергии в мае текущего года превзойдет 1 000 000 кВт/ч.

7. Среднее квадратическое отклонение ошибки измерения азимута равно $30'$ (математическое ожидание равно нулю). Оценить вероятность того, что ошибка среднего арифметического трех независимых измерений не превзойдет 1° .

8. Длина изготавливаемых деталей является случайной величиной, среднее значение которой 50 мм. Среднее квадратическое отклонение этой величины равно 0,2 мм. Оценить вероятность того, что отклонение длины изготовленной детали от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0,4 мм.

9. Емкость изготавливаемого заводом конденсатора по техническим условиям должна быть равной 2 мкф с разрешенным допуском $\pm 0,1$ мкф. Завод добился средней емкости, равной 2 мкф, с дисперсией, равной 0,002 мкф². Какой процент составляет вероятный брак при изготовлении конденсаторов? Расчет произвести по неравенству Чебышева и формуле Лапласа.

Контрольные вопросы:

1. Назовите теоремы, которые входят в Закон больших чисел.
2. Верно ли утверждение: Теорема Чебышева позволяет с достаточной точностью по средней арифметической судить о математическом ожидании или, наоборот, по математическому ожиданию предсказывать ожидаемую величину средней. Так, на основании этой теоремы можно утверждать, что если проведено достаточно большое количество измерений определённого параметра прибором, свободным от систематической погрешности, то средняя арифметическая результатов этих измерений сколь угодно мало отличается от истинного значения измеряемого параметра?