

Практическое занятие № 2.

Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов.

Цель: изучить формулы для возведения двучлена в степень выше трех.

Норма времени: 2 часа

Порядок выполнения работы

Теоретические сведения

Бином Ньютона - это отношение, позволяющая представить выражение $(a + b)^n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) в виде многочлена.

С помощью следующей таблицы можно определить значения биномиальных коэффициентов для любой степени. Строится он следующим образом - любое число образуется суммой рядом стоящих чисел над ним. Именно потому эта таблица имеет название треугольник Паскаля:

					1					
					1		1			
				1		2		1		
			1		3		3		1	
		1		4		6		4		1
	1		5		10		10		5	1
	1	6		15		20		15	6	1
	1	7	21		35		35	21	7	1
1	8	28	56		70		56	28	8	1

Количество этих слагаемых есть не что иное, как число сочетаний C_n^m , где n - степень двучлена, m - степень второго выражения.

Рассмотрим следующие выражения со степенями $(a + b)^n$, где $a + b$ есть любой бином, а n - целое число.

$$\begin{aligned}(a + b)^0 &= 1 \\(a + b)^1 &= a + b \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\(a + b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

Каждое выражение - это полином. Во всех выражениях можно заметить особенности.

1. В каждом выражении на одно слагаемое больше, чем показатель степени n .
2. В каждом слагаемом сумма степеней равна n , т.е. степени, в которую возводится бином.
3. Степени начинаются со степени бинома n и уменьшаются к 0. Последний член не имеет множителя a . Первый член не имеет множителя b , т.е. степени b начинаются с 0 и увеличиваются до n .
4. Коэффициенты начинаются с 1 и увеличиваются на определенные значения до "половины пути", а потом уменьшаются на те же значения обратно к 1.

Бином Ньютона с использованием треугольника Паскаля

Для любого бинома $a + b$ и любого натурального числа n ,

$$(a + b)^n = c_0 a^n b^0 + c_1 a^{n-1} b^1 + c_2 a^{n-2} b^2 + \dots + c_{n-1} a^1 b^{n-1} + c_n a^0 b^n,$$

где числа $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n$ взяты с $(n + 1)$ ряда треугольника Паскаля.

Свойства биномиальных коэффициентов

Для биномиальных коэффициентов справедливы равенства:

- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$,
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$,
- $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$,
- $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$,

Пример 1. Написать разложение по формуле бинома Ньютона и упростить $(a+b)^4$.
Решение:

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 = \\ \frac{4!}{0!4!} a^4 + \frac{4!}{1!3!} a^3 b + \frac{4!}{2!2!} a^2 b^2 + \frac{4!}{3!1!} a b^3 + \frac{4!}{4!0!} b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Пример 2. Найти 13-й член разложения бинома

$$\left({}^3\sqrt{3} + \sqrt{2} \right)^{15}.$$

Решение. Согласно формуле общего члена разложения бинома,

$$T_{13} = T_{12+1} = C_{15}^{12} \left({}^3\sqrt{3} \right)^3 \left(\sqrt{2} \right)^{12} = C_5^3 \cdot 3 \cdot 2^6 = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 2^6 = 87360.$$

Выполнить задания:

- Написать разложение по формуле бинома Ньютона и упростить: а) $(b+\sqrt{2})^6$; б) $(a-2b)^5$.
- Найти пятый и девятый член разложения: а) $(\sqrt{z}+z)^{10}$, б) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}$.
- Найти два средних члена разложения $(a^3-ab)^{23}$.
- Используя треугольник Паскаля найти коэффициенты разложения: а) $(a+b)^9$, $(a+b)^{12}$.

Задания по вариантам:

1. Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить. Коэффициенты разложения найти, используя треугольник Паскаля:

- | | | | |
|------------------------------------|-----------------------------|---|------------------------------------|
| 1. $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^7$ | 4. $(a+2b)^6$ | 8. $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^8$ | 10. $\left(a-\frac{1}{a}\right)^5$ |
| 2. $(1+\sqrt{2})^5$ | 5. $(a-\sqrt{2})^6$ | 9. $\frac{1}{27}(\sqrt{3}-\sqrt{15})^6$ | |
| 3. $(1-\sqrt{2})^5$ | 6. $(\sqrt{6}+\sqrt{12})^4$ | | |
| | 7. $(1+2x)^5$ | | |

2. Найти два средних члена разложения:

- | | | |
|--------------------------|------------------------|---------------------------|
| 1) $(a^3+ab)^{31}$ | 2) $(a^3+ba)^{30}$ | 3) $(a^2+b)^{21}$ |
| 4) $(a+b^2)^{17}$ | 5) $(a^2+b^3)^{13}$ | 6) $(a^3+b^2)^{15}$ |
| 7) $(a^2+\sqrt{b})^{19}$ | 8) $(\sqrt{a}+b)^{17}$ | 9) $(a+\sqrt{a})^{17}$ |
| | | 10) $(a^2+\sqrt{a})^{15}$ |

Контрольные вопросы:

- Прочитать и записать формулу бинома Ньютона.
- Как строится треугольник Паскаля для нахождения коэффициентов бинома Ньютона?
- По какой формуле найти n-й член бинома Ньютона?