Практическое занятие № 5

Тема: Решение задач нелинейного программирования графическим методом. Решение задач нелинейного программирования методом множителей Лагранжа.

Цель: Решить задачу нелинейного программирования графическим методом и методом множителей Лагранжа.

Оборудование и материалы: Методические рекомендации; рабочая тетрадь.

Краткие теоретические основания выполнения задания

Задачами нелинейного программирования называются задачи математического программирования, в которых нелинейны и (или) целевая функция, и (или) ограничения в виде неравенств или равенств.

Задачи нелинейного программирования можно классифицировать в соответствии с видом функции $F(x)$, функциями ограничений и размерностью вектора x (вектора решений).

В самом общем виде классификация представлена в таблице.

Вид *F(x)*	**Вид функции ограничений**	**Число переменных**	**Название задачи**
Нелинейная	Отсутствуют	1	Безусловная однопараметрическая оптимизация
Нелинейная	Отсутствуют	Более 1	Безусловная многопараметрическая оптимизация
Нелинейная или линейная	Нелинейные или линейные	Более 1	Условная нелинейная оптимизация

Общих способов решения, аналогичных симплекс-методу линейного программирования, для нелинейного программирования не существует. В каждом конкретном случае способ выбирается в зависимости от вида функции $F(x)$. Задачи нелинейного программирования на практике возникают довольно часто, когда, например, затраты растут не пропорционально количеству закупленных или произведённых товаров.

Задачи нелинейного программирования относятся ***к трудным*** вычислительным задачам. При их решении часто приходится прибегать к приближенным **м*етодам оптимизации***. Мощным средством для решения задач нелинейного программирования являются численные методы. Они позволяют найти решение задачи с заданной степенью точности.

Общая формулировка нелинейных задач:

Найти переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\Psi (x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i,\ i = 1, 2, \dots, m \qquad (1)$$

и обращающие в максимум (минимум) целевую функцию

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (2)$$

Примером типичной и простой нелинейной задачи является следующая:
Данное предприятие для производства какого-то продукта расходует два средства в количестве x_1 и x_2 соответственно. Это факторы производства, например, машины и труд, два различных сырья и т.п., а величины x_1 и x_2 – затраты факторов производства. Факторы производства впредь будем считать взаимозаменяемыми. Если это «труд» и «машины», то можно применять такие методы производства, при которых величина затрат машин в сопоставлении с величиной затрат труда оказывается больше или меньше (производство более или менее трудоемкое).

Объем производства (выраженный в натуральных или стоимостных единицах) является функцией затрат производства $Z = f(x_1, x_2)$. Эта зависимость называется **производственной функцией**. Издержки зависят от расхода обоих факторов (x_1 и x_2) и от цен этих факторов (c_1 и c_2). Совокупные издержки выражаются формулой $b = c_1 x_1 + c_2 x_2$. Требуется при данных совокупных издержках определить такое количество факторов производства, которое максимизирует объем продукции Z.

Математическая модель этой задачи имеет вид: определить такие переменные x_1 и x_2, удовлетворяющие условиям

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = b \qquad (3)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \qquad (4)$$

при которых функция

$$Z = f(x_1, x_2) \qquad (5)$$

достигает максимума. Как правило, функция (5) может иметь произвольный нелинейный вид.

Использую классические методы оптимизации, следует четко представлять себе различие между ***локальным*** экстремумом функции, ***глобальным*** экстремумом и ***условным*** экстремумом. Понятие условного экстремума вводится для случая, когда число переменных n не меньше 2 $(n \geq 2)$. Будем полагать, что функция $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X)$ дважды дифференцируема в точке $X^* = (x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots, x_n{}^*)$, $(X^* \in D(f))$ и в некоторой ее окрестности.

Если для всех точек X этой окрестности $f(X^*) \geq f(X)$ или $f(X^*) \leq f(X)$, то говорят, что функция $f(X)$ имеет экстремум в X^* (соответственно максимум или минимум).

Точка X^* , в которой все частные производные функции $Z = f(X)$ равны 0, называется **стационарной точкой**.

Необходимое условие экстремума.

Если в точке X^* функция $Z = f(X)$ имеет экстремум, то частные производные функции в этой точке равны 0:

$f'_{x1}(X^*) = 0, i = 1, 2, \ldots, n.$

Следовательно, точки экстремума функции $Z = f(X)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Для получения достаточных условий следует определить в стационарной точке знак дифференциала второго порядка. Дифференциала второго порядка обозначается $d^2f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $f'_{x1}(X)$ найти частную производную по переменной x_j , то получим частную производную второго порядка по переменным x_i , x_j , которая обозначается $f''_{xi,\,xj}(X)$. В этом случае

$$d^2f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{xi,\,xj}(X)\,\Delta x_i\,\Delta x_j$$

Достаточные условия экстремума.

Двух переменных:

- если $\Delta > 0$ и $a_{11} < 0$ $(a_{22} < 0)$, то в точке X^0 функция имеет максимум:

если $\Delta > 0$ и $a_{11} > 0$ $(a_{22} > 0)$,то в точке X^0 – минимум (в этих случаях $X^0 = X^*$);

- если $\Delta < 0$, то экстремума нет;
- если $\Delta = 0$, то вопрос об экстремуме остается открытым.

Метод множителей Лагранжа

Способ определения условного экстремума начинается с построения вспомогательной функции Лагранжа, которая в области допустимых решений достигает максимума для тех же значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что и целевая функция z.
Пусть решается задача определения условного экстремума функции $z = f(X)$ при ограничениях $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ m < n$

Составим функцию

$$L(X) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(X) \qquad (7)$$

которая называется *функцией Лагранжа*. X, — постоянные множители (*множители Лагранжа*). Отметим, что множителям Лагранжа можно придать экономический смысл. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — доход, соответствующий плану $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а функция $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — издержки i-го ресурса, соответствующие этому плану, то X, — цена (оценка) i-го ресурса, характеризующая изменение экстремального значения целевой функции в зависимости от изменения размера i-го ресурса (маргинальная оценка). $L(X)$ — функция $n + m$ переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Определение стационарных точек этой функции приводит к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X)}{\partial x_j} = 0, \ j = 1,2,\dots,n, \\ \dfrac{\partial L(X)}{\partial \lambda_i} = 0, \ i = 1,2,\dots,m. \end{cases} \qquad (8)$$

Легко заметить, что $L'_{\lambda_i}(X) = \varphi_i(X)$. Таким образом, задача нахождения условного экстремума функции ***z = f (X)*** сводится к нахождению локального экстремума функции ***L(X)***. Если стационарная точка найдена, то вопрос о существовании экстремума в простейших случаях решается на основании достаточных условий экстремума — исследования знака второго дифференциала $d^2L(X)$ в стационарной точке при условии, что переменные приращения Δx_i - связаны соотношениями

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \Delta x_j = 0, \ i = 1, 2, \dots, m, \qquad (9)$$

полученными путем дифференцирования уравнений связи.

Решение системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными с помощью средства *Поиск решения*

Настройка **Поиск решения** позволяет находить решение системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = C_1 \\ f_2(x,y) = C_2 \end{cases} \qquad (10)$$

где $f_i(x,y), i = 1,2$ - нелинейная функция от переменных ***x*** и ***y***, $C_i, i = 1,2$ - произвольная постоянная.

Известно, что пара (***x, y***) является решением системы уравнений (10) тогда и только тогда, когда она является решением следующего уравнение с двумя неизвестными:

$$\left(f_1(x,y) - C_1\right)^2 + \left(f_2(x,y) - C_2\right)^2 = 0 \qquad (11)$$

С другой стороны, решение системы (10) — это точки пересечения двух кривых: $f_1(x,y) = C$ и $f_2(x, y) = C_2$ на плоскости *XOY*.

Из этого следует метод нахождения корней системы нелинейных уравнений:

1. Определить (хотя бы приближенно) интервал существования решения системы уравнений (10) или уравнения (11). Здесь необходимо учитывать вид уравнений, входящих в систему, область определения каждого их уравнений и т. п. Иногда применяется подбор начального приближения решения;
2. Протабулировать решение уравнения (11) по переменным x и y на выбранном интервале, либо построить графики функций $f_1(x,y)$ = C, и $f_2(x,y) = C_2$ (система(10)).
3. Локализовать предполагаемые корни системы уравнений — найти несколько минимальных значений из таблицы табулирование корней уравнения (11), либо определить точки пересечения кривых, входящих в

систему (10).

4. Найти корни для системы уравнений (10) с помощью надстройки **Поиск решения.**

Порядок выполнения заданий

Задача. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$$

Решение:

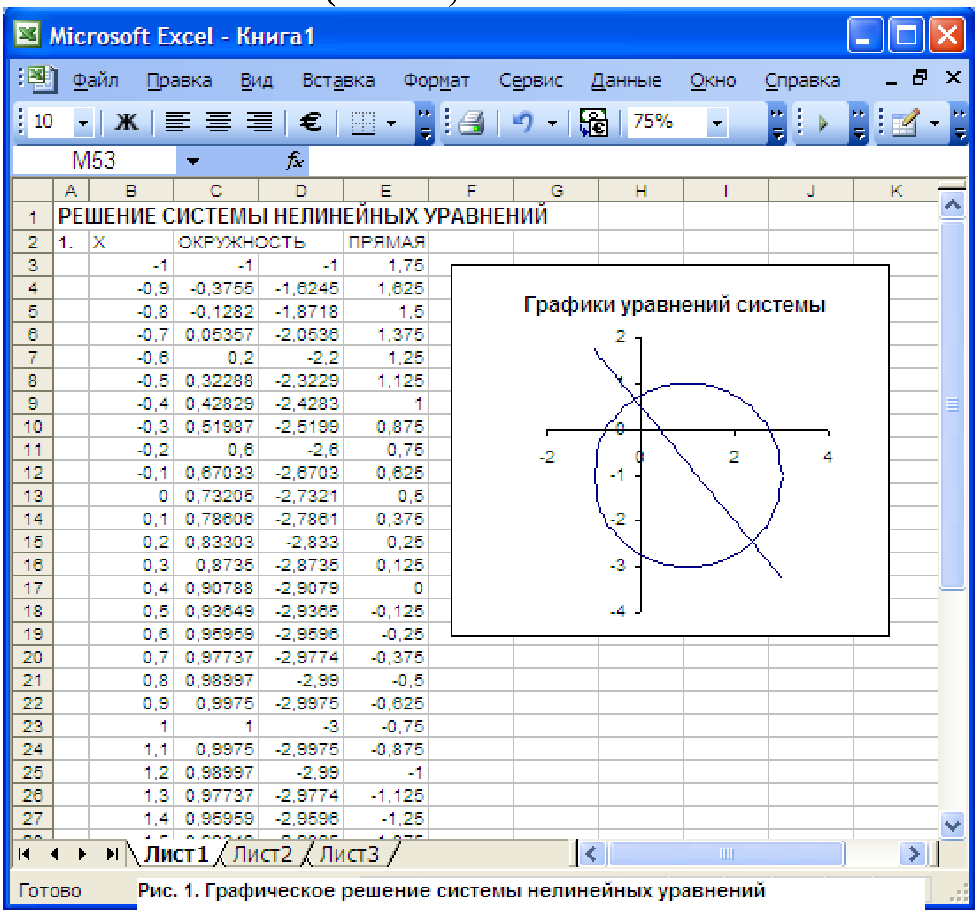
Легко видеть, что решение системы уравнений являются точки пересечения окружности (с радиусом 2 и центром (1,-1)) и прямой $y = 0{,}5 - 1{,}25x$.

Данную систему заменим равносильным уравнением:

$\left((x-1)^2 + (y+1)^2 - 4\right)^2 + (5x + 4y - 2)^2 = 0$, для которого будем искать решения с площадью надстройки **Поиск решения**.

1. Исходя из графиков уравнений, интервал локализации корней определим в границах от -3 до 3 (рис. 1). Ячейка **B3:B43** содержат значения X. Формулы для построения графиков:

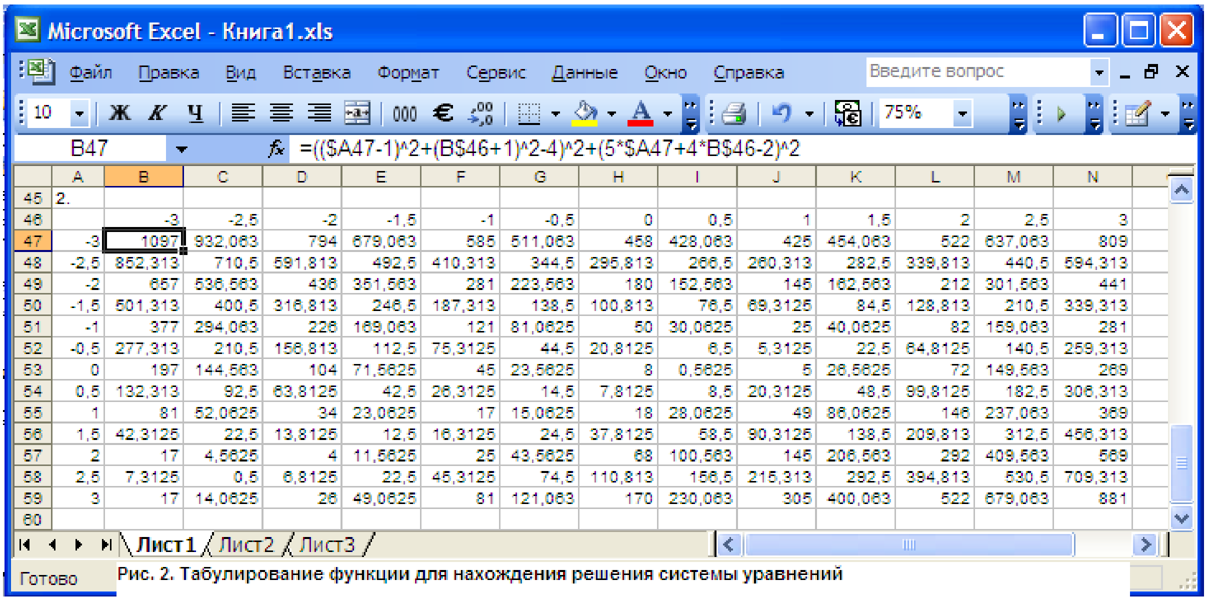
- В ячейке **C3**:=-1+КОРЕНЬ(4-(B3-1)^2)
- В ячейке **D3**:=-1-КОРЕНЬ(4-(B3-1)^2)
- В ячейке **E3**:=(2-5*B3)/4



	A	B	C	D	E
1	РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ				
2	1.	X	ОКРУЖНОСТЬ		ПРЯМАЯ
3		-1	-1	-1	1,75
4		-0,9	-0,3755	-1,6245	1,625
5		-0,8	-0,1282	-1,8718	1,5
6		-0,7	0,05357	-2,0536	1,375
7		-0,6	0,2	-2,2	1,25
8		-0,5	0,32288	-2,3229	1,125
9		-0,4	0,42829	-2,4283	1
10		-0,3	0,51987	-2,5199	0,875
11		-0,2	0,6	-2,6	0,75
12		-0,1	0,67033	-2,6703	0,625
13		0	0,73205	-2,7321	0,5
14		0,1	0,78606	-2,7861	0,375
15		0,2	0,83303	-2,833	0,25
16		0,3	0,8735	-2,8735	0,125
17		0,4	0,90788	-2,9079	0
18		0,5	0,93649	-2,9365	-0,125
19		0,6	0,95959	-2,9596	-0,25
20		0,7	0,97737	-2,9774	-0,375
21		0,8	0,98997	-2,99	-0,5
22		0,9	0,9975	-2,9975	-0,625
23		1	1	-3	-0,75
24		1,1	0,9975	-2,9975	-0,875
25		1,2	0,98997	-2,99	-1
26		1,3	0,97737	-2,9774	-1,125
27		1,4	0,95959	-2,9596	-1,25

Рис. 1. Графическое решение системы нелинейных уравнений

Табулируем равносильное уравнение на отрезке [-3; 3] с шагом 0,5 (рис. 2).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
45	2.													
46		-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
47	-3	1097	932,063	794	679,063	585	511,063	458	428,063	425	454,063	522	637,063	809
48	-2,5	852,313	710,5	591,813	492,5	410,313	344,5	295,813	266,5	260,313	282,5	339,813	440,5	594,313
49	-2	657	536,563	436	351,563	281	223,563	180	152,563	145	162,563	212	301,563	441
50	-1,5	501,313	400,5	316,813	246,5	187,313	138,5	100,813	76,5	69,3125	84,5	128,813	210,5	339,313
51	-1	377	294,063	226	169,063	121	81,0625	50	30,0625	25	40,0625	82	159,063	281
52	-0,5	277,313	210,5	156,813	112,5	75,3125	44,5	20,8125	6,5	5,3125	22,5	64,8125	140,5	259,313
53	0	197	144,563	104	71,5625	45	23,5625	8	0,5625	5	26,5625	72	149,563	269
54	0,5	132,313	92,5	63,8125	42,5	26,3125	14,5	7,8125	8,5	20,3125	48,5	99,8125	182,5	306,313
55	1	81	52,0625	34	23,0625	17	15,0625	18	28,0625	49	86,0625	146	237,063	369
56	1,5	42,3125	22,5	13,8125	12,5	16,3125	24,5	37,8125	58,5	90,3125	138,5	209,813	312,5	456,313
57	2	17	4,5625	4	11,5625	25	43,5625	68	100,563	145	206,563	292	409,563	569
58	2,5	7,3125	0,5	6,8125	22,5	45,3125	74,5	110,813	156,5	215,313	292,5	394,813	530,5	709,313
59	3	17	14,0625	26	49,0625	81	121,063	170	230,063	305	400,063	522	679,063	881
60														

Рис. 2. Табулирование функции для нахождения решения системы уравнений

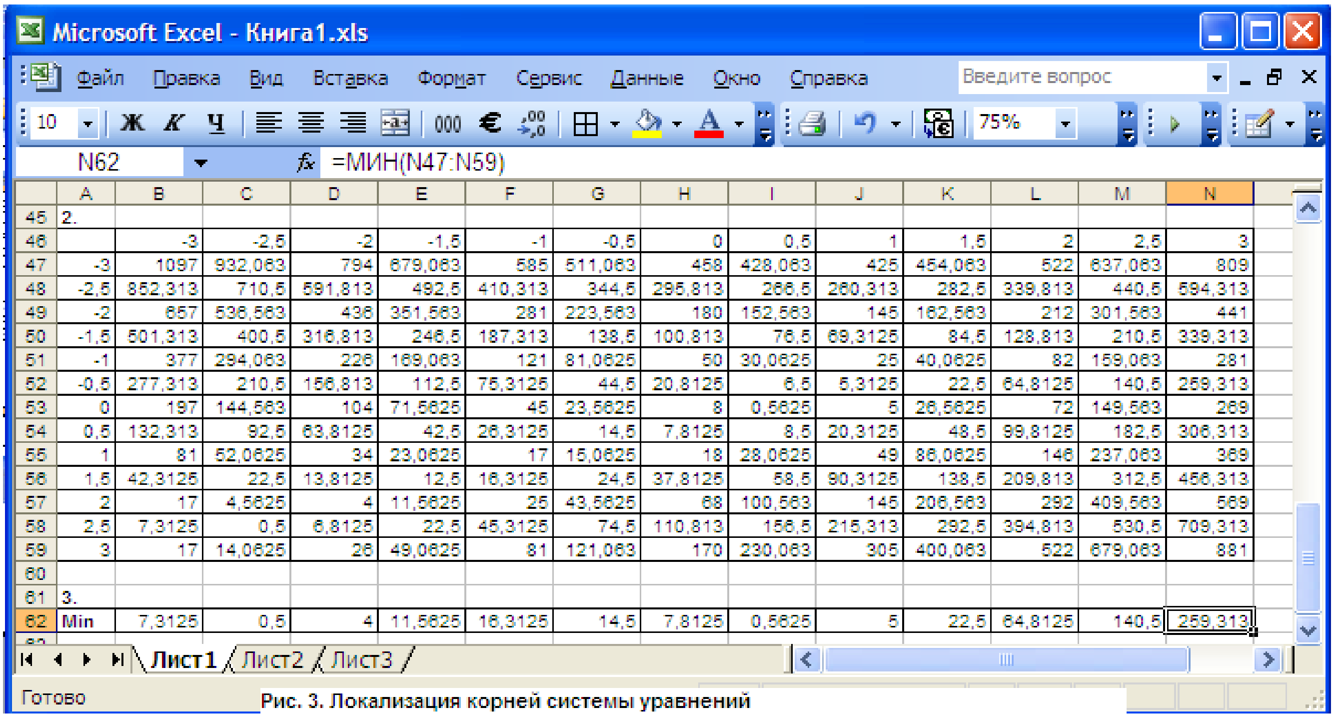
2. Локализируем корни равносильного уравнения (рис. 3):

- Ячейки **A47:A59** содержат значения X на отрезке [-3; 3] с шагом 0,5;
- Ячейки **B46:N46** содержат значения Y на отрезке [-3; 3] с шагом 0,5;
- Формула для ячейки **B47** (копируется на диапазон **B47:N59**):

=(($A47-1)^2+(B$46+1)^2-4)^2+(5*$A47+4*B$46-2)^2

- Формула для ячейки **B62** (копируется на диапазон **B62:N62**):=МИН(B47:B59)

Исходя из результатов вычислений, определим следующие пары предполагаемых корней уравнения: (2,5; -2,5), (2; -2), (0; 0,5), (0; 1).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
45	2.													
46		-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
47	-3	1097	932,063	794	679,063	585	511,063	458	428,063	425	454,063	522	637,063	809
48	-2,5	852,313	710,5	591,813	492,5	410,313	344,5	295,813	266,5	260,313	282,5	339,813	440,5	594,313
49	-2	657	536,563	436	351,563	281	223,563	180	152,563	145	162,563	212	301,563	441
50	-1,5	501,313	400,5	316,813	246,5	187,313	138,5	100,813	76,5	69,3125	84,5	128,813	210,5	339,313
51	-1	377	294,063	226	169,063	121	81,0625	50	30,0625	25	40,0625	82	159,063	281
52	-0,5	277,313	210,5	156,813	112,5	75,3125	44,5	20,8125	6,5	5,3125	22,5	64,8125	140,5	259,313
53	0	197	144,563	104	71,5625	45	23,5625	8	0,5625	5	26,5625	72	149,563	269
54	0,5	132,313	92,5	63,8125	42,5	26,3125	14,5	7,8125	8,5	20,3125	48,5	99,8125	182,5	306,313
55	1	81	52,0625	34	23,0625	17	15,0625	18	28,0625	49	86,0625	146	237,063	369
56	1,5	42,3125	22,5	13,8125	12,5	16,3125	24,5	37,8125	58,5	90,3125	138,5	209,813	312,5	456,313
57	2	17	4,5625	4	11,5625	25	43,5625	68	100,563	145	206,563	292	409,563	569
58	2,5	7,3125	0,5	6,8125	22,5	45,3125	74,5	110,813	156,5	215,313	292,5	394,813	530,5	709,313
59	3	17	14,0625	26	49,0625	81	121,063	170	230,063	305	400,063	522	679,063	881
60														
61	3.													
62	Min	7,3125	0,5	4	11,5625	16,3125	14,5	7,8125	0,5625	5	22,5	64,8125	140,5	259,313

Рис. 3. Локализация корней системы уравнений

3. Найдем корни равносильного уравнения (рис. 4) – для этого поместим пары значений для предполагаемых корней в ячейки **D69:E72**. В

ячейку G69 введем формулу для равносильного уравнения (копируется на диапазон **G69:G72**):=((D69-1)^2+(E69+1)^2-4)^2+(5*D69+4*E69-2)^2

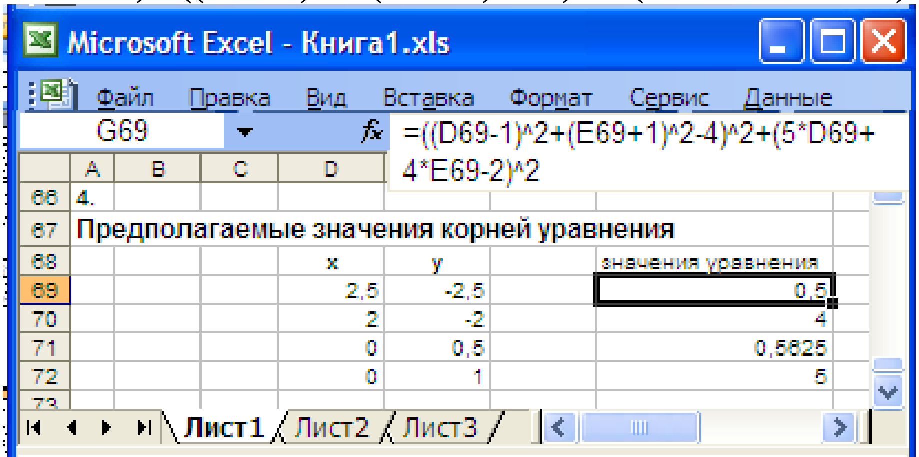


Рис. 4. Подготовка листа рабочей книги для нахождения корней нелинейной системы уравнений

С помощью надстройки Поиск решения (в окне Параметры поиска решения флажок Линейная модель должен быть снят) установим необходимые параметры для поиска корня равносильного уравнения (рис. 5),

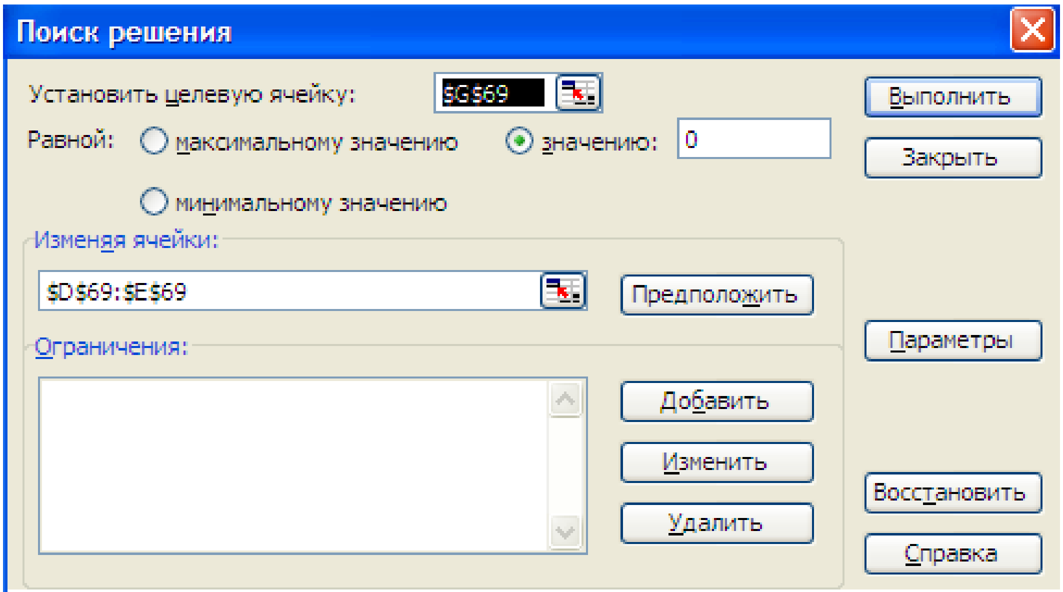


Рис. 5. Ввод данных в окно Поиск решения для задачи нахождения корней системы

Затем выполним поиск решения. Процедуру повторим для всех имеющихся пар корней.

Результаты поиска решения (рис. 6) позволяют делать вывод о том, что система имеет 2 решения:
(2,3675745729901; -2,45934248863711) и (-0,123564081639673; 0,654434224216163)

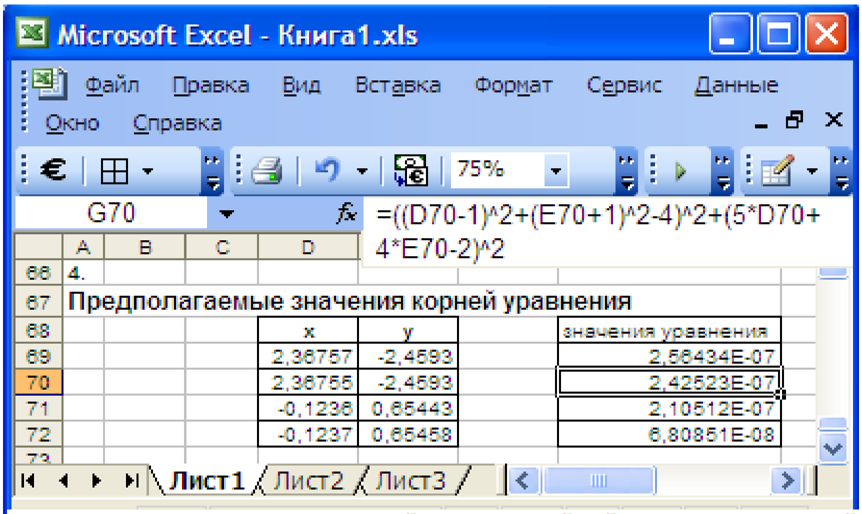


Рис. 6. Результаты поиска решений для нелинейной системы уравнений

Задания для самостоятельной работы

1 вариант.

Задача. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 = 4 \\ 6x + 10y = 4 \end{cases}$$

2 вариант.

Задача. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 4(x-1)^2 + 5(y+1)^2 = 12 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$$

3 вариант.

Задача. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ x + 6y = 10 \end{cases}$$

4 вариант.

Задача. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 3(x-3)^2 + 5(y+5)^2 = 25 \\ x = 12 + 2y \end{cases}$$

5 вариант.

Задача. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 7x^2 + 3y^2 = 4 \\ 8x + 4y = 2 \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются задачами нелинейного программирования?
2. Как записывается общая формулировка нелинейных задач?
3. Как выглядит классификация задач нелинейного программирования?
4. В чем суть метода множителей Лагранжа?
5. Какие способы решения нелинейных задач вы знаете?