

### Практическое занятие № 3

**Тема:** Сведение произвольной задачи линейного программирования к основной задаче линейного программирования. Решение задач линейного программирования симплекс–методом

**Цель:** Научиться сводить произвольную задачу линейного программирования к основной задаче линейного программирования. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

**Оборудование и материалы:** Методические рекомендации; рабочая тетрадь.

#### Краткие теоретические основания выполнения задания

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции (линейной формы) при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств относятся к задачам линейного программирования.

**Линейное программирование** – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих **систему ограничений**, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции  $F$ ), которые удовлетворяют системе ограничений, называется **допустимым планом** задачи линейного программирования. Функция  $F$ , максимум или минимум которой определяется, называется **целевой функцией** задачи. Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции  $F$ , называется **оптимальным планом** задачи.

Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется условиями производства. Задачей линейного программирования (**ЗЛП**) является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального).

Общая форма задачи линейного программирования формулируют следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_m. \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (2)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min) \quad (3)$$

Коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  – любые действительные числа (возможно 0).

Итак, решения, удовлетворяющие системе ограничений (1) условий задачи и требованиям неотрицательности (2), называются **допустимыми**, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованиям минимизации (максимализации) (3) целевой функции, – **оптимальными**.

Выше описанная задача линейного программирования (ЗЛП) представлена в общей форме, но одна и та же (ЗЛП) может быть сформулирована в различных эквивалентных формах. Наиболее важными формами задачи линейного программирования являются **каноническая** и **стандартная**.

В **канонической форме** задача является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции  $F$ , ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются неотрицательными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (5)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min) \quad (6)$$

*К канонической форме можно преобразовать любую задачу линейного программирования.*

#### **Правило приведения ЗЛП к каноническому виду:**

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение (например, первое) было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной переменной, при чем в неравенства « $\leq$ » вводится дополнительная неотрицательная переменная со знаком «+»; в случаи неравенства « $\geq$ » - со знаком «-»

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \quad (7)$$

Вводим переменную  $x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$ .

Тогда неравенство (7) запишется в виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \quad (8)$$

В каждое из неравенств вводится своя “**уравнивающая**” переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений.

2. Если в исходной задаче некоторая переменная не подчинена условию неотрицательности, то ее заменяют (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью неотрицательных переменных

$$\begin{aligned} x_k &= x_k - x_l, \\ x_k &\geq 0, x_l \geq 0 \end{aligned}, \quad l - \text{свободный индекс}$$

3. Если в ограничениях правая часть отрицательна, то следует умножить это ограничение на (-1)

4. Наконец, если исходная задача была задачей на минимум, то введением новой целевой функции  $F_1 = -F$  мы преобразуем нашу задачу на минимум функции  $F$  в задачу на максимум функции  $F_1$ .

Таким образом, **всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в канонической форме.**

В стандартной форме задача линейного программирования является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ограничений ее состоит из одних линейных неравенств типа « $\leq$ » или « $\geq$ ». Все переменные задачи неотрицательны.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m. \end{aligned} \quad (9)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в **стандартной форме**. Преобразование задачи на минимум в задачу на максимум, а также обеспечение не отрицательности переменных производится так же, как и раньше. Всякое равенство в системе ограничений равносильно системе взаимоположенных неравенств:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &= b_i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \leq -b_i, \end{cases} \end{aligned}$$

Существует и другие способы преобразования системы равенств в систему неравенств, т.е. **всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме.**

**Решение задач линейного программирования симплекс-методом.**

Идея симплекс-метода заключается в последовательном улучшении первоначального плана путем упорядоченного перехода от одного опорного плана к другому и завершается нахождением оптимального плана. Симплекс-методом решаются только канонические задачи линейного программирования. Решение канонической задачи симплекс-методом существенно облегчается применением так называемых симплексных таблиц. Всякую каноническую

задачу можно записать условно в виде таблицы. Таблица заполняется следующим образом: первые  $m$  строк содержат в условной форме уравнения системы ограничений, разрешенные относительно базисных переменных. В последней строке записана целевая функция, эта строка называется F-строкой. В столбцах записаны свободные переменные и свободные члены.

**Условие оптимальности плана:** если ЗЛП на максимум, то в F-строке не должно быть отрицательных элементов; если ЗЛП на минимум, то в F-строке не должно быть положительных элементов.

#### **Алгоритм решения:**

1. Исходную задачу линейного программирования приводим к каноническому виду путем введения базисных переменных.

2. Базисные переменные выражаем через свободные переменные.

3. Строим начальный план, полагая свободные переменные равными нулю, тогда базисные переменные будут равны свободным членам.

4. Строим первую симплекс-таблицу.

5. Проверяем план на оптимальность. Если план не оптимален, то его улучшаем.

6. Улучшение плана.

а) выбор разрешающего столбца: для этого в F-строке выбираем максимальный по абсолютной величине из отрицательных элементов, если задача на максимум, или, максимальный из положительных элементов, если задача на минимум. Пусть это будет столбец с номером  $s$ ;

б) выбор разрешающей строки: выбираем строку с минимальным симплексным отношением. Симплексные отношения - это отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца. Пусть это будет строка с номером  $r$ .

в) выбор разрешающего элемента: элемент, стоящий на пересечении разрешающих строки и столбца. Пусть это будет элемент  $a_{rs}$ .

г) переменную  $x_s$  вводим в базис вместо переменной  $x_r$ .

д) элементы новой симплекс-таблицы  $b_{ij}$  пересчитываем по следующим формулам:

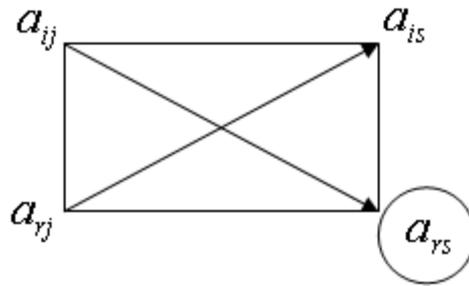
$$\text{разрешающий элемент } b_{rs} = \frac{1}{a_{rs}},$$

$$\text{элементы разрешающего столбца } b_{is} = -\frac{a_{is}}{a_{rs}}, i \neq r,$$

$$\text{элементы разрешающей строки } b_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}, j \neq s,$$

остальные элементы симплекс-таблицы по правилу прямоугольника:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}$$



7. Вновь полученный план проверяем на оптимальность.

### Порядок выполнения заданий

**Задание 1. а)** Привести к канонической форме задачу линейного программирования.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

**б)** Напишите задачу в стандартной форме.

**Решение:**

**а)** Введем дополнительные переменные  $x_4, x_5$ . Причем в первое неравенство введем переменную  $x_4$  со знаком плюс, а в третье — неотрицательную переменную,  $x_5$  со знаком минус запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 - x_5 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Переведем  $\min$  на  $\max$ , домножив целевую функцию на  $(-1)$

$$F = -x_1 + x_2 - 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

**б)** Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в **стандартной форме**. Преобразование задачи на минимум в задачу на максимум, а также обеспечение неотрицательности переменных производится так же, как и раньше. Всякое равенство в системе ограничений равносильно системе взаимоположенных неравенств, тогда получим:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 + 2x_3 \leq 8 \\ -x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ -x_1 - 2x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = -x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$$

**Задание 2.** Для производства двух видов, изделия  $P_1$  и  $P_2$  используется, три вида сырья  $S_1, S_2, S_3$ , запасы которого соответственно равны 100, 60, 180

единиц. Для производства одной единицы продукции  $P_1$  используется 2 единицы сырья  $S_1$  и по 1 единице сырья  $S_2$  и  $S_3$ . Для производства одной единицы продукции  $P_2$  используется по 1 единице сырья  $S_1$  и  $S_2$  и 4 единицы сырья  $S_3$ . Прибыль от реализации 1 единицы каждой продукции  $P_1$  и  $P_2$  соответственно равна 30 и 20 единиц. Необходимо составить симплекс-методом такой план выпуска продукции  $P_1$  и  $P_2$ , при котором суммарная прибыль будет наибольшей.

**Решение.**

1. Составим математическую модель задачи:

Пусть  $x_1$  – единица готовой продукции вида  $P_1$ ,

$x_2$  - единица готовой продукции вида  $P_2$ ,

Цель фабрики получить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов  $P_1$  и  $P_2$ , тогда:

$$F = 30 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 60 \\ x_1 + 4x_2 \leq 180 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \text{условие неотрицательности}$$

2. Задачу приводим к каноническому виду:

$$F = 30 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 60 \\ x_1 + 4x_2 + x_5 = 180 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0$$

3. Базисные переменные выражаем через свободные:

$$\begin{cases} x_3 = 100 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 60 - x_1 - x_2 \\ x_5 = 180 - x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

4. Записываем начальный план:  $X_0 = (0; 0; 100; 60; 180)$ .

5. Строим первую симплекс-таблицу:

Таблица 1. Первая симплекс-таблица

Своб. перем. Базис. перем.	$-x_1$	$-x_2$	Свободные члены	Симплексные отношения
$x_3$	2	1	100	$\frac{100}{2} = 50 \text{min}$
$x_4$	1	1	60	$\frac{60}{1} = 60$
$x_5$	1	4	180	$\frac{180}{1} = 180$
F-строка	-30	-20	0	

6. Начальный план не оптимален, так как в F-строке есть отрицательные элементы.

7. Улучшение плана. Строим вторую симплекс-таблицу, элементы которой пересчитываем по соответствующим формулам.

Таблица 2. Вторая симплекс-таблица

Своб. перем. Базис. перем.	$-x_3$	$-x_2$	Свободные члены	Симплексные отношения
$x_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	50	100
$x_4$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10	20 min
$x_5$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	130	$\approx 37,14$
F-строка	15	-5	1500	

8. План, соответствующий таблице 2,  $X_1 = (50; 0; 0; 10; 130)$ . не оптимален, так как в F-строке есть отрицательные элементы. Улучшаем его.

9. Улучшение плана. Строим третью симплекс-таблицу, элементы которой пересчитываем по соответствующим формулам.

Таблица 3. Третья симплекс-таблица

Своб. перем. Базис. перем.	$-x_3$	$-x_4$	Свободные члены	Симплексные отношения
$x_1$	1	-1	40	
$x_2$	-1	2	20	
$x_5$	3	-7	60	
F-строка	10	10	1600	

10. План, соответствующий таблице 3,  $X_2 = (40; 20; 0; 0; 60)$ . оптимален, так как в F-строке нет отрицательных элементов.

Ответ: если предприятие будет выпускать продукцию вида  $P_1$  и  $P_2$  в количестве 40 и 20 единиц соответственно, то получит максимальную прибыль в размере 1600 единиц, при этом сырье  $S_1, S_2$  будет израсходовано полностью, а сырье  $S_3$  останется в количестве 60 единиц.

### Задания для самостоятельной работы 1 вариант.

**Задача 1. а)** Привести к канонической форме задачу линейного программирования.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

б) Напишите задачу в стандартной форме.

**Задача 2.** Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется  $a_1$  кг первого сорта,  $a_2$  кг второго сорта и  $a_3$  кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется  $b_1$  кг первого сорта,  $b_2$  кг второго сорта,  $b_3$  кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта  $c_1$  кг, второго сорта  $c_2$  кг, третьего сорта  $c_3$  кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида  $\alpha$  руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида  $\beta$  руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В симплекс-методом.

$$a_1=19, a_2=16, a_3=19, b_1=31, b_2=9, b_3=1, c_1=1121, c_2=706, c_3=1066, \\ \alpha=16, \beta=19.$$

## 2 вариант.

**Задача 1. а)** Привести к канонической форме задачу линейного программирования.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

б) Напишите задачу в стандартной форме.

**Задача 2.** Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется  $a_1$  кг первого сорта,  $a_2$  кг второго сорта и  $a_3$  кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется  $b_1$  кг первого сорта,  $b_2$  кг второго сорта,  $b_3$  кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта  $c_1$  кг, второго сорта  $c_2$  кг, третьего сорта  $c_3$  кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида  $\alpha$  руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида  $\beta$  руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В симплекс-методом.

$$a_1=14, a_2=15, a_3=20, b_1=40, b_2=27, b_3=4, c_1=1200, c_2=993, c_3=1097, \\ \alpha=5, \beta=13.$$

### 3 вариант.

**Задача 1. а)** Привести к канонической форме задачу линейного программирования.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14 \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = -2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

**б)** Напишите задачу в стандартной форме.

**Задача 2.** Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется  $a1$  кг первого сорта,  $a2$  кг второго сорта и  $a3$  кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется  $b1$  кг первого сорта,  $b2$  кг второго сорта,  $b3$  кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта  $c1$  кг, второго сорта  $c2$  кг, третьего сорта  $c3$  кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида  $\alpha$  руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида  $\beta$  руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В симплекс-методом.

$$a1=14, a2=15, a3=20, b1=40, b2=27, b3=4, c1=1200, c2=993, c3=1097, \\ \alpha=5, \beta=13.$$

### 4 вариант.

**Задача 1. а)** Привести к канонической форме задачу линейного программирования.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 16 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

**б)** Напишите задачу в стандартной форме.

**Задача 2.** Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется  $a1$  кг первого сорта,  $a2$  кг второго сорта и  $a3$  кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется  $b1$  кг первого сорта,  $b2$  кг второго сорта,  $b3$  кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта  $c1$  кг, второго сорта  $c2$  кг, третьего сорта  $c3$  кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида  $\alpha$  руб., а от реализации единицы готовой продукции

вида В фабрика имеет прибыль вида  $\beta$  руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В симплекс-методом.

$$a_1=9, a_2=15, a_3=15, b_1=27, b_2=15, b_3=3, c_1=606, c_2=802, c_3=840, \\ \alpha=11, \beta=6.$$

### 5 вариант.

**Задача 1. а)** Привести к канонической форме задачу линейного программирования.

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \geq 15, \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 \leq 17 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \rightarrow \min$$

**б)** Напишите задачу в стандартной форме.

**Задача 2.** Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется  $a_1$  кг первого сорта,  $a_2$  кг второго сорта и  $a_3$  кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется  $b_1$  кг первого сорта,  $b_2$  кг второго сорта,  $b_3$  кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта  $c_1$  кг, второго сорта  $c_2$  кг, третьего сорта  $c_3$  кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида  $\alpha$  руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида  $\beta$  руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В симплекс-методом.

$$a_1=13, a_2=13, a_3=11, b_1=23, b_2=11, b_3=1, c_1=608, c_2=614, c_3=575, \\ \alpha=5, \beta=7.$$

### Контрольные вопросы

1. Какие задачи можно отнести к задачам линейного программирования?
2. Какова основная идея линейного программирования?
3. Что образует систем ограничений?
4. Что называется допустимым планом?
5. Что называется целевой функцией?
6. Как записывается общая форма задачи линейного программирования?
7. Как строится каноническая форма ЗЛП?
8. Как перевести ЗЛП в стандартную форму?
9. Какова идея симплекс-метода?
10. В чем суть условия оптимальности плана?
11. Из каких пунктов состоит алгоритм решения ЗЛП симплекс-методом?
12. Что такое симплекс-отношение?