Практическое занятие №2

Тема: «Решение простейших однокритериальных задач».

Цель: определить оптимальное решение однокритериальных и многокритериальных задач в простейших случаях.

Оборудование и материалы: методические рекомендации; рабочая тетрадь.

Краткие теоретические основания выполнения задания

В зависимости от вида показателя эффективности различают задачи принятия решений по скалярному показателю (однокритериальные задачи) и задачи принятия решений по векторному показателю (многокритериальные задачи).

Задачами **математического программирования** называют **однокритериальные задачи оптимизации**. Методы их решения оперируют с детерминированными математическими моделями. В этих моделях отражены разнообразные проблемы распределения ограниченных ресурсов в экономике, военном деле, создании новой техники и т.д. Пути решения этих проблем, так или иначе, связаны с планированием целенаправленной деятельности, т.е. с разработкой определенных установок на будущее.

Задача математического программирования формулируется следующим_образом: найти значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, доставляющие максимум (минимум) заданной целевой функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условиях:

$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le (\ge, =) b_j, (j = \overline{1, m}).$$

Различают два вида задач математического программирования:

1. Задачи линейного программирования.
2. Задачи нелинейного программирования.

В первых задачах функция y и ограничения g_j линейны относительно переменных x. Во вторых задачах целевая функция y и (или) условия g_j имеют разного рода нелинейности.

Графоаналитический метод решения задач оптимизации

Этим методом вручную решаются простые задачи оптимизации. Математические модели в этих задачах не должны быть сложными, т.к. в противном случае требуется много времени для их решения. Для начала рассмотрим однопараметрическую однокритериальную задачу оптимизации.

Постановка задачи: Дан один критерий y. Объект (процесс) описан уравнением (уравнениями), включающими один искомый параметр $y = f(x)$. Имеется система ограничений:

$1) x \ge a_1;$

$2) a_2 \le x \le b_1;$

и т.д.

Необходимо найти оптимальное значение параметра $x - x_{ОПТ}$, обращающее целевую функцию $f(x)$ в максимум или минимум.

Задача решается в два этапа:

1. Построение области допустимых решений (ОДР).
2. Нахождение в пределах ОДР оптимального решения.

При построении ОДР на первом этапе рассматривается система ограничений. Все ограничения должны быть выполнены. Выполнение первого ограничения в приведенной выше постановке задачи оптимизации означает, что искомое значение параметра x должно находиться правее a_1, причем, a_1 в разрешенный интервал входит (рис.1). Выполнение второго ограничения означает, что искомое значение параметра x должно находиться в интервале (на отрезке) $[a_2 b_1]$, следует иметь в виду, что границы интервала в интервал входят.

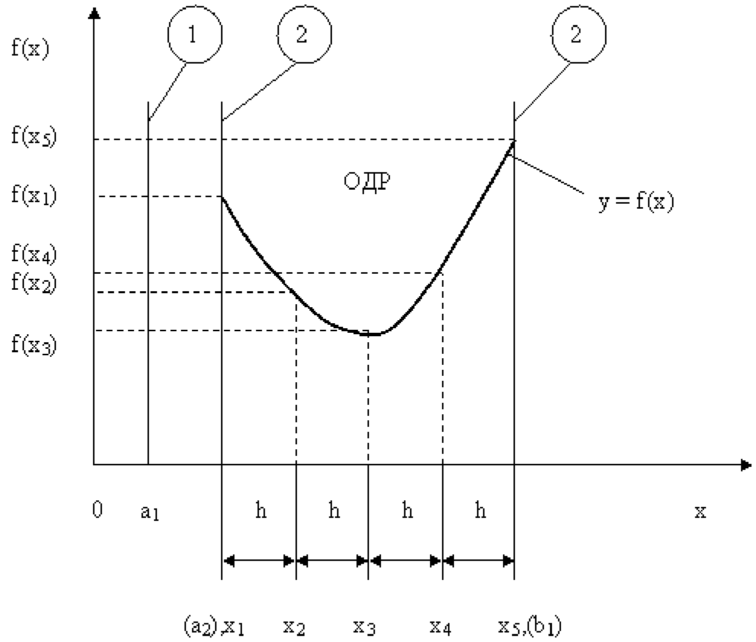


Рис.1. Графическая иллюстрация решения однопараметрической однокритериальной задачи оптимизации

Когда однопараметрическая однокритериальная задача оптимизации решается с применением графоаналитического метода вручную, то на втором этапе применяют метод перебора. Суть его заключается в следующем. В пределах ОДР через определенный интервал h выбирается ряд значений параметра x. В рассматриваемом нами случае ОДР разбита на четыре отрезка, и выбрано пять значений параметра x. Для этих значений параметра x рассчитываются соответствующие значения целевой функции. Среди них находят минимальное (максимальное) значение. Значение параметра x_i, обращающее целевую функцию в минимум (максимум), является оптимальным. Если в рассматриваемом нами случае $f(x)$ стремится к минимуму, то $x_{ОПТ} = x_3$, если к максимуму, то $x_{ОПТ} = x_5$.

При решении практических задач оптимизации всегда следует иметь в виду, какова целевая функция. Это значительно упрощает работу как при решении задач оптимизации вручную с применением графоаналитического метода, так и при решении таких задач с использованием компьютерных программ. Причем, это относится и к случаю использования готовых программ, и, что особенно важно, к разработке собственных программ.

Рассмотрим, например, следующий частный случай, когда целевая функция линейная (рис.2.).

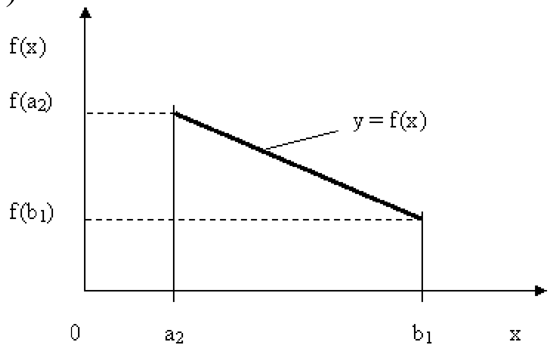


Рис.2. Графическая иллюстрация решения однопараметрической однокритериальной задачи оптимизации для случая линейной целевой функции

В данном случае на втором этапе вычисляют значения целевой функции только на границах ОДР. Эти значения сравнивают и выбирают наименьшее или наибольшее. Для примера, приведенного на рис. 2, если $f(x) \to \min$, то $x_{опт} = b_1$, если $f(x) \to \max$, то $x_{опт} = a_2$.

В задачах, как правило, присутствует не один, а несколько признаков предпочтения (критериев). Такие задачи называются **многокритериальными.** Критерии могут оказаться противоречивыми, т.е. решение, лучшее по определенному признаку, может оказаться худшим по другому признаку.

Например, минимизация стоимости и максимизация качества товара почти всегда противоречивы. В этом случае задача отыскания решения, предпочтительного по всем признакам, будет ***некорректной***, т.е. не будет иметь ни одного решения.

В случае противоречивых критериев имеются следующие подходы к отысканию подходящего решения.

1) **Замена некоторых критериев ограничениями** вида $\leq$ или $\geq$. Например, минимизация стоимости $f(x) \to \min$, может быть заменена ограничением вида $f(x) \leq A$, где A некоторая верхняя оценка стоимости, т.е. максимально допустимая стоимость.

2)**Свертка критериев.** Создается один глобальный скалярный критерий, целевая функция которого является некоторой функцией от исходных целевых функций. Наиболее употребимыми являются линейные свертки вида $\alpha f(x) + \beta g(x)$ (в случае двух критериев). Нетривиальной является задача отыскания адекватных значений коэффициентов α и β , отражающих относительную важность целевых функций $f(x)$ и $g(x)$.

3) **Ранжирование критериев.** Критерии ранжируются по степени важности.

4) **Отыскание решений, лучших хотя бы по одному критерию.**

Подходы 1) и 2) приводят к **однокритериальной задаче**.

Подход 3) приводит **к *задаче с упорядоченными критериями***.

Подход 4) приводит к ***задаче с независимыми критериями***. В задаче с упорядоченными критериями критерии упорядочиваются по важности, и требуется найти оптимальное решение для наименее важного критерия на множестве решений, оптимальных для более важного критерия (см. рис 3). Самое большое множество

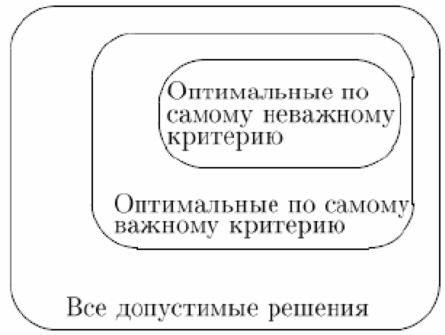


Рис 3. Множество решений.

всех допустимых решений, в него вложено множество решений, оптимальных по самому важному критерию, далее вложено множество оптимальных решений по второму по важности критерию, и т.д.

В задаче с независимыми критериями требуется найти множество ***недоминируемых (эффективных) решений***. **Недоминируемое решение лучше любого другого допустимого решения хотя бы по одному критерию либо не хуже по всем критериям.**

Множество недоминируемых решений также называется ***множеством Парето.***

Порядок выполнения заданий

Задание 1. Решить графическим способом задачу. Для производства двух видов, изделии P_1 и P_2 используется, три вида сырья S_1, S_2, S_3, запасы которого соответственно равны 100, 60, 180 единиц. Для производства одной единицы продукции P_1 используется 2 единицы сырья S_1 и по 1 единице сырья $S_2 u S_3$. Для производства одной единицы продукции P_2 используется по 1 единице сырья $S_1 u S_2$ и 4 единицы сырья S_3. Прибыль от реализации 1 единицы каждой продукции P_1 и P_2 соответственно равна 30 и 20 единиц. Необходимо составить такой план выпуска продукции P_1 и P_2, при котором суммарная прибыль будет наибольшей.

Решение.

Составим математическую модель задачи:

Пусть x_1 – единица готовой продукции вида P_1,

x_2 - единица готовой продукции вида P_2,

Цель фабрики получить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов P_1 и P_2, тогда:

$F = 30 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 \to \max$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 100 \\ x_1 + x_2 \le 60 \\ x_1 + 4x_2 \le 180 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$ *условие неотрицательности*

Алгоритм решения:

1. Используя систему ограничений и условия неотрицательности, строим область допустимых решений.
2. Строим линию уровня $F = 0$. Линией уровня функции двух переменных называется линия, вдоль которой функция сохраняет свое постояное значение.
3. Строим градиент целевой функции. Градиент функции - это вектор, имеющий своими координатами частные производные функции и показывающий направление наискорейшего роста значения функции. Так как целевая функция ЗЛП линейная, то линии уровня целевой функции - прямые и $\overline{gradF} = \bar{n}$, *n*- вектор нормали к этим прямым.
4. Перемещаем линию уровня $F = 0$ вдоль градиента функции. Если ЗЛП на минимум, то оптимальное решение находится в первой точке, принадлежащей ОДР; если ЗЛП на максимум, то оптимальное решения находится в последней точке, принадлежащей ОДР.

Замечание.

При построении ОДР возможны случаи:

1. ОДР оказалась пустым множеством. В этом случае ЗЛП не имеет решения из-за несовместности системы ограничений.

2. ОДР оказалась либо выпуклым многоугольником, либо не ограниченной выпуклой многоугольной областью. Тогда ЗЛП имеет оптимальное решение, которое совпадает по крайней мере с одной из вершин ОДР.

Используя алгоритм решения и систему ограничений и условия неотрицательности, построим ОДР. Для этого во всех неравенствах системы ограничений и условия неотрицательности знак неравенства заменим на знак равенства. В результате будем иметь уравнения прямых:

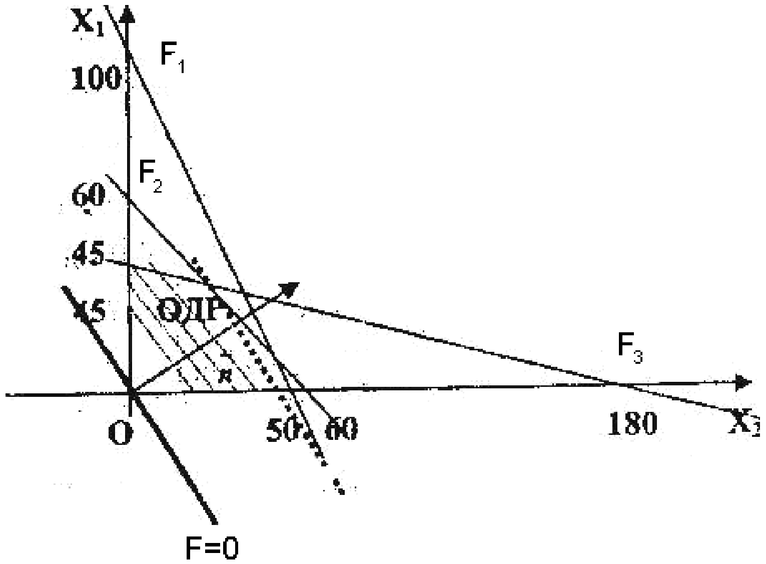
$F_1 : 2x_1 + x_2 = 100$

$F_2 : x_1 + x_2 = 60$

$F_3 : x_1 + 4x_2 = 180$

$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$

В системе координат X_1OX_2 построим эти прямые. В результате будем иметь ОДР. В этой же системе координат строим линию уровня $F = 0$ и вектор $\overline{gradF} = \bar{n}$



Так как задача на максимум, будем перемещать линию уровня F=0 вдоль вектора *n* до тех пор, пока она не пересечет ОДР в самом крайнем своем положении, т.е. при дальнейшем перемещении она не будет с ОДР иметь общие точки. Такой точкой оказалась точка пересечения прямых F_1 и F_2.

Вычислим ее координаты.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 100 \\ x_1 + x_2 = 60 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 40, \quad x_2 = 20, \qquad F_{\max} = 30 \cdot 40 + 20 \cdot 20 = 1600$$

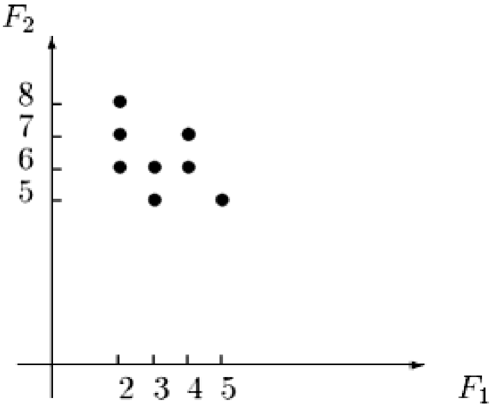
Таким образом, если предприятие будет выпускать продукцию вида P_1 и P_2, в количестве 40 и 20 единиц соответственно, то получит максимальную прибыль в размере 1600 единиц.

Задание 2. Фирме необходимо выбрать наилучший вариант закупки оборудования, если задана закупочная цена каждого из вариантов оборудования и время изготовления и доставки. Под наилучшим вариантом понимается вариант с минимальными закупочной стоимостью и временем доставки.

Обозначим, соответственно, через x_i – номер, $F_1(x_i)$ - время изготовления и доставки, $F_2(x_i)$ – закупочную стоимость варианта закупки оборудования. Значения функций $F_1(x_i)$ и $F_2(x_i)$ заданы таблицей:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(x_i)$	2	2	2	3	3	4	4	5
$F_2(x_i)$	6	7	8	5	6	6	7	5

Задача отыскания множества Парето в случае двух критериев вида $F_1(x) \rightarrow min$ и $F_2(x) \rightarrow min$ может быть решена графически следующим образом. Находим все точки с наименьшим значением $F_1(x)$.



Если их несколько, выбираем из них точку с наименьшим значением $F_2(x)$. Включаем ее в множество Парето. Отсекаем точки с большими либо равными значениями $F_1(x)$ и $F_2(x)$ (северо-восточный угол с вершиной в выбранной точке). Повторяем процедуру для оставшейся части допустимой области.

Из рисунка видно, что для нас представляют интерес пары $(F_1,F_2)\in\{(2,6),(3,5)\}$ и соответствующие решения $(x_1,x_2)\in\{(2,2),(1,2)\}$, которые являются недоминируемыми и образуют множество Парето рассматриваемой задачи.

Задания для самостоятельной работы

1 вариант.

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется ***a1*** кг первого сорта, ***a2*** кг второго сорта и ***a3*** кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется ***b1*** кг первого сорта, ***b2*** кг второго сорта, ***b3*** кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта ***c1*** кг, второго сорта ***c2*** кг, третьего сорта ***c3*** кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида ***α*** руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида ***β*** руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

a1= 19, a2= 16, a3= 19, b1= 26, b2= 17, b3= 8, c1= 868, c2= 638, c3= 853, α=5, β=4.

Задача 2. Фирме необходимо выбрать наилучший вариант закупки оборудования, если задана закупочная цена каждого из вариантов оборудования и время изготовления и доставки. Под наилучшим вариантом понимается вариант с минимальными закупочной стоимостью и временем доставки.

А) Для заданной двухкритериальной задачи, задавшись коэффициентами α и β провести линейную свертку критериев $F_1(x)$ и $F_2(x)$ и определить минимальное решение.

Б) Для заданной двухкритериальной задачи найти множество Парето в случае двух критериев вида $F_1(x) \to \min$ и $F_2(x) \to \min$.

Значения $F_1(x_i)$ и $F_2(x_i)$ заданы таблицей:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(x_i)$	2	2	2	3	3	4	4	5
$F_2(x_i)$	4	5	6	3	4	4	5	3

2 вариант.

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется ***a1*** кг первого сорта, ***a2*** кг второго сорта и ***a3*** кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется ***b1*** кг первого сорта, ***b2*** кг второго сорта, ***b3*** кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта ***c1*** кг, второго сорта ***c2*** кг, третьего сорта ***c3*** кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида ***α*** руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида ***β*** руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

a1= 14, a2= 15, a3= 20, b1= 40, b2= 27, b3= 4, c1= 1200, c2= 993, c3= 1097,

α=5, β=13.

Задача 2. Фирме необходимо выбрать наилучший вариант закупки оборудования, если задана закупочная цена каждого из вариантов оборудования и время изготовления и доставки. Под наилучшим вариантом понимается вариант с минимальными закупочной стоимостью и временем доставки.

А) Для заданной двухкритериальной задачи, задавшись коэффициентами α и β провести линейную свертку критериев $F_1(x)$ и $F_2(x)$ и определить минимальное решение.

Б) Для заданной двухкритериальной задачи найти множество Парето в случае двух критериев вида $F_1(x) \to \min$ и $F_2(x) \to \min$.

Значения $F_1(x_i)$ и $F_2(x_i)$ заданы таблицей:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(x_i)$	3	3	3	4	4	5	5	6
$F_2(x_i)$	5	6	7	4	5	5	6	4

3 вариант.

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется ***a1*** кг первого сорта, ***a2*** кг второго сорта и ***a3*** кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется ***b1*** кг первого сорта, ***b2*** кг второго сорта, ***b3*** кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта ***c1*** кг, второго сорта ***c2*** кг, третьего сорта ***c3*** кг.

От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида ***α*** руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида ***β*** руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

a1= 9, a2= 15, a3= 15, b1= 27, b2= 15, b3= 3, c1= 606, c2= 802, c3= 840, α=11, β=6.

Задача 2. Фирме необходимо выбрать наилучший вариант закупки оборудования, если задана закупочная цена каждого из вариантов оборудования и время изготовления и доставки. Под наилучшим вариантом понимается вариант с минимальными закупочной стоимостью и временем доставки.

А) Для заданной двухкритериальной задачи, задавшись коэффициентами α и β провести линейную свертку критериев $F_1(x)$ и $F_2(x)$ и определить минимальное решение.

Б) Для заданной двухкритериальной задачи найти множество Парето в случае двух критериев вида $F_1(x) \to \min$ и $F_2(x) \to \min$.

Значения $F_1(x_i)$ и $F_2(x_i)$ заданы таблицей:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(x_i)$	4	4	4	5	5	6	6	7
$F_2(x_i)$	6	7	8	5	6	6	7	5

4 вариант.

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется ***a1*** кг первого сорта, ***a2*** кг второго сорта и ***a3*** кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется ***b1*** кг первого сорта, ***b2*** кг второго сорта, ***b3*** кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта ***c1*** кг, второго сорта ***c2*** кг, третьего сорта ***c3*** кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида ***α*** руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида ***β*** руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

a1= 13, a2= 13, a3= 11, b1= 23, b2= 11, b3= 1, c1= 608, c2= 614, c3= 575, α=5, β=7.

Задача 2. Фирме необходимо выбрать наилучший вариант закупки оборудования, если задана закупочная цена каждого из вариантов оборудования и время изготовления и доставки. Под наилучшим вариантом понимается вариант с минимальными закупочной стоимостью и временем доставки.

А) Для заданной двухкритериальной задачи, задавшись коэффициентами α и β провести линейную свертку критериев $F_1(x)$ и $F_2(x)$ и определить минимальное решение.

Б) Для заданной двухкритериальной задачи найти множество Парето в случае двух критериев вида $F_1(x) \to \min$ и $F_2(x) \to \min$.

Значения $F_1(x_i)$ и $F_2(x_i)$ заданы таблицей:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(x_i)$	2	2	2	3	3	4	5	5
$F_2(x_i)$	6	4	7	2	4	4	6	5

5 вариант.

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется ***a1*** кг первого сорта, ***a2*** кг второго сорта и ***a3*** кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется ***b1*** кг первого сорта, ***b2*** кг второго сорта, ***b3*** кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта ***c1*** кг, второго сорта ***c2*** кг, третьего сорта ***c3*** кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида ***α*** руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида ***β*** руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

a1= 19, a2= 16, a3= 19, b1= 31, b2= 9, b3= 1, c1= 1121, c2= 706, c3= 1066, α=16, β=19.

Задача 2. Фирме необходимо выбрать наилучший вариант закупки оборудования, если задана закупочная цена каждого из вариантов оборудования и время изготовления и доставки. Под наилучшим вариантом понимается вариант с минимальными закупочной стоимостью и временем доставки.

А) Для заданной двухкритериальной задачи, задавшись коэффициентами α и β провести линейную свертку критериев $F_1(x)$ и $F_2(x)$ и определить минимальное решение.

Б) Для заданной двухкритериальной задачи найти множество Парето в случае двух критериев вида $F_1(x) \to \min$ и $F_2(x) \to \min$.

Значения $F_1(x_i)$ и $F_2(x_i)$ заданы таблицей:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(x_i)$	5	5	5	6	6	7	7	8
$F_2(x_i)$	7	8	9	6	7	7	8	6

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются однокритериальными?
2. Какие задачи называются многокритериальными?
3. Какие способы решения однокритериальных задач вы знаете?
4. Какие подходы к отысканию подходящего решения вы знаете у противоречивых критериев?
5. Какое множество называется множеством Парето?