Практическое занятие № 11

Тема: Построение прогнозов количественными методами. Построение прогнозов качественными методами.

Цель: Научиться применять МНК для линейного сглаживания данные. Научиться сглаживать данные с помощью квадратичной функции

Оборудование и материалы: Методические рекомендации; рабочая тетрадь.

Краткие теоретические основания выполнения задания

Метод наименьших квадратов — один из методов регрессионного анализа для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки.

Метод наименьших квадратов применяется также для приближённого представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений.

Метод наименьших квадратов предусматривает нахождение параметров функциональной зависимости из условия минимума суммы квадратов отклонений.

1. Если $f(x)$ - линейная функция, т.е. $y = ax + b$, то $S = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right)^2$, неизвестные параметры $a,\ b$ определяются из системы

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (1)$$

Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, получили название ***эмпирических формул***.

Система (1) называется ***системой нормальных уравнений***.

2. Если $f(x)$ - квадратичная функция, т.е. $y = ax^2 + bx + c$, то $S = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2$, неизвестные параметры $a,\ b,\ c$ определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (2)$$

<u>Пример 1.</u>

С помощью МНК подобрать параметры a и b линейной функции $y = ax + b$, приближенно описывающей следующие опытные данные.

Построить полученную прямую и исходные точки в одной системе координат.

x	0	1	1,5	2,1	3
y	2,9	6,3	7,9	10	13,2

Решение:

Параметры a и b искомой функции найдем из системы нормальных уравнений. Для этого перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Для решения задачи составим таблицу.

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	0	2,9	0	0
2	1,0	6,3	1	6,3
3	1,5	7,9	2,25	11,85
4	2,1	10,0	4,41	21
5	3,0	13,2	9,0	39,6
$\sum$	7,6	40,3	16,66	78,75

Тогда система нормальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 16{,}66a + 7{,}6b = 78{,}75 \\ 7{,}6a + 5b = 40{,}3 \end{cases}.$$

Решим систему.

Для этого выразим b из второго уравнения:

$$5b = 40{,}3 - 7{,}6$$

$$b = (40{,}3 - 7{,}6)/5$$

Подставим в первое уравнение:

$$16{,}66a + \frac{7{,}6}{5}(40{,}3 - 7{,}6a) = 78{,}75$$

$$16{,}66a + 61{,}25b - 11{,}552a = 78{,}75$$

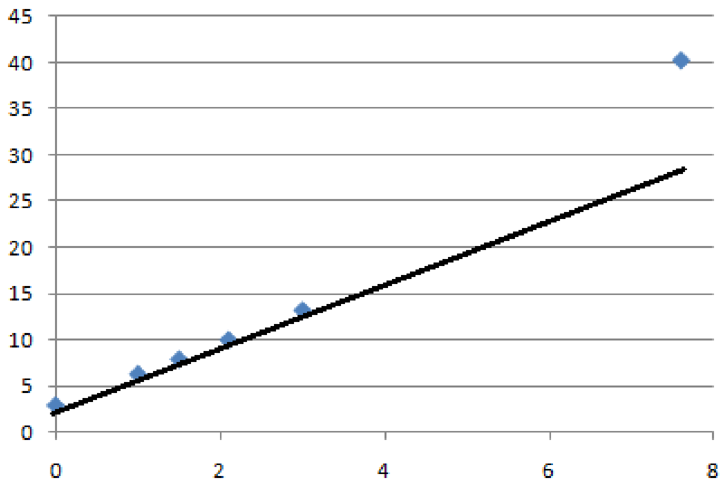
$$5{,}108a = 17{,}494$$

$$a = 3{,}42.$$

Отсюда $b = \dfrac{40{,}3 - 7{,}6 \cdot 3{,}42}{5} = 2{,}86$.

Итак, $a = 3{,}42$, $b = 2{,}86$, и, следовательно, искомая функция имеет вид: $y = 3{,}42x + 2{,}86$.

Построим полученную прямую и исходные точки в одной системе координат.



Вывод: Так как исходные данные и полученная прямая расположены близко друг к другу, то аппроксимирующая функция найдена правильно.

Задание

Задание 1. С помощью МНК подобрать параметры a и b линейной функции $y = ax + b$, приближенно описывающей следующие опытные данные. Построить полученную прямую и исходные точки в одной системе координат.

вариант							
1	x_i	1	3	4	5	6	8
	y_i	6	4	4	2	3	2
2	x_i	2	3	4	5	7	8
	y_i	1	3	4	6	6	9
3	x_i	1	2	4	6	7	8
	y_i	7	6	4	5	3	3
4	x_i	2	3	4	5	7	8
	y_i	2	6	6	7	8	10

Задание 2. С помощью МНК подобрать параметры a и b квадратичной функции $y = a^2x + bx + c$, приближенно описывающей следующие опытные данные. Построить полученную линию и исходные точки в одной системе координат.

вариант							
1	x_i	2	2,5	3	3,5	4	4,5
	y_i	4,2	2,5	6,2	7,5	2,6	1
2	x_i	1	1,5	2	2,6	2,9	3,1
	y_i	2,6	5,6	4,3	1,6	2,6	3,4
3	x_i	2	3	3,6	3,8	4,2	4,6
	y_i	0	2,3	2,5	2,9	1	4,5

4	x_i	5	5,5	6	6,5	7	7,5
	y_i	4,5	4,6	8,5	2,6	4,5	6,7

Контрольные вопросы:

1. Какова общая постановка задачи нахождения эмпирических формул?
2. Каким образом можно оценивать качество приближения?
3. Каким образом графически можно интерпретировать постановку задачи нахождения эмпирических формул?
4. В чем сходство и различие постановки задачи метода наименьших квадратов и задачи интерполяции?
5. Какие виды приближающих функций обычно применяются?
6. В чем суть метода приближения таблично заданной функции по методу наименьших квадратов линейной функцией?
7. Как сводится задача построения различных эмпирических формул к задаче нахождения линейной функции?