Практическое занятие №9

Тема: «Проверка булевой функции на принадлежность к классам T0, T1, S, L, M. Полнота множеств**»**.

Цель: Сформировать умение проводить исследование системы функций на полноту.
Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.
Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Краткая теоретическая часть

Рассмотрим классы булевых функций, которые играют большую роль в вопросах функциональной полноты.

Класс функций	*Характеристика функций*
Класс самодвойственных функций S	Функция $f^*(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$, если $f^*(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=\overline{f(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3},\dots,\overline{x_n})}$. Функция $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ называется *самодвойственной*, если $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=f^*(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$, то есть $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=\overline{f(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3},\dots,\overline{x_n})}$. Из определения следует, что если функция самодвойственная, то она принимает противоположные значения на противоположных наборах переменных. Все функции, являющиеся самодвойственными, образуют *класс самодвойственных функций S*.
Класс линейных функций L	Функция $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ называется линейной, если она представима в виде полинома Жегалкина степени не выше первой, т.е. $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=\alpha_0\oplus\alpha_1x_1\oplus\alpha_2x_2\oplus\dots\oplus\alpha_nx_n$, где $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\{0,1\}$. Все функции, являющиеся линейными, образуют класс линейных функций L.
Класс монотонных функций M	Функция $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ называется монотонной, если для любых наборов переменных α и β, таких что $\alpha\leq\beta$ выполняется неравенство $f(\alpha)\leq f(\beta)$. Все функции, являющиеся монотонными, образуют класс монотонных функций M. Исходя из определения монотонной функции, следует, что если с увеличением набора переменных значение функции не уменьшается, то функция является монотонной.
Классы функций, сохраняющих константы 0 и 1 – T_0 и T_1	Функция $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ сохраняет константу 0, если $f(0,0,0,\dots,0)=0$. Все функции, сохраняющие константу 0, образуют класс T_0. Функция $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ сохраняет константу 1, если $f(1,1,1,\dots,1)=1$. Все функции, сохраняющие константу 1, образуют класс T_1.

Теорема Э.Поста (критерий полноты системы булевых функций). Система булевых функций $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$ является полной тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из классов T_0, T_1, L, M, S.

Задания практической работы:

Проверить принадлежность следующих булевых функций классам S,L,M,T_0,T_1

1. f(x,y,z)= $xy\bar{z} \vee x\bar{y}$
2. f(x,y,z)= $(x \vee yz) \oplus xyz$
3. f(x,y,z)= $(x \vee yz) \oplus \bar{x}yz$
4. f(x,y,z)= $(xyz \vee x\bar{y}\bar{z}) \oplus x \cdot (y \oplus z)$
5. f(x,y,z)= $xyz \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x(y \vee z)$
6. f(x,y,z)= $(xyz \oplus \bar{x}\bar{y}z) \vee (x\bar{y}z \oplus \bar{x}yz)$

Исследовать на полноту систему функций:

а) {xy; x $\vee$ y; x $\oplus$ y; xy $\vee yz \vee xz$ }

б) {xy; x $\vee$ y; x $\oplus$ y $\oplus$ z $\oplus$ 1}

в) {1; $\bar{x}$; $x \cdot$ (y~z) $\oplus \bar{x}(y \oplus z)$; x~y}

г) {0; $\bar{x}$; $x \cdot (y \oplus z) \oplus yz$ }

д) { $xy(x \oplus y)$; $xy \oplus x \oplus y$; 1; xy $\oplus yz \oplus xz$ }

е) { $xy(x \oplus z)$; 1}

ж) {x $\rightarrow$ y; $x \oplus y$ }

Пояснения к работе

Решение каждой задачи необходимо аккуратно оформлять в рабочей тетради, сопровождая подробными пояснениями, сокращать решение нельзя. При выполнении заданий можно пользоваться сборником формул.

При исследовании системы булевых функций $\{f_1, f_2,..., f_n\}$ на полноту целесообразно придерживаться *алгоритма*:

1. Проверить принадлежность каждой функции $\{f_1, f_2,..., f_n\}$ к каждому из классов S, L, M, T_0, T_1;
2. Заполнить критериальную таблицу, в которой знаком «+» отразить принадлежность функции определенному классу и «-» – не принадлежность:

	S	L	M	T_0	T_1
f_1					
f_2					
…					
f_n					

3. Сделать вывод: если в таблице хотя бы один столбец будет содержать все «+» (т.е. все функции принадлежат одному и тому же классу), то система функций не является полной, в противном случае – система функций является полной.

Контрольные вопросы:

1. Чем характеризуется класс самодвойственных функций?
2. Чем характеризуется класс линейных функций?
3. Чем характеризуется класс монотонных функций?
4. Чем характеризуется класс функций, сохраняющих 0?
5. Чем характеризуется класс функций, сохраняющих 1?
6. Сформулируйте критерий полноты системы булевых функций.