

Практическое занятие №7

Тема: «Минимизация булевой функции. Многочлен Жегалкина».

Цель: Сформировать умение представлять булевы функции в виде полинома Жегалкина.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Полином Жегалкина может быть построен как с помощью последовательных преобразований, так и по таблице истинности (метод неопределенных коэффициентов).

Формально полином Жегалкина можно представить в виде

$$P(X_1 \dots X_n) = a \oplus a_1 X_1 \oplus a_2 X_2 \oplus \dots \oplus a_n X_n \oplus a_{12} X_1 X_2 \oplus a_{13} X_1 X_3 \oplus \dots \oplus a_{1 \dots n} X_1 \dots X_n, \\ a, \dots, a_{1 \dots n} \in 0, 1.$$

Пример: Дана функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и её таблица истинности:

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Построим для неё полином Жегалкина:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{0000} \oplus a_{1000} x_1 \oplus a_{0100} x_2 \oplus a_{0010} x_3 \oplus a_{0001} x_4 \oplus a_{1100} x_1 x_2 \oplus a_{1010} x_1 x_3 \oplus a_{1001} x_1 x_4 \oplus a_{0110} x_2 x_3 \oplus a_{0101} x_2 x_4 \oplus a_{0011} x_3 x_4 \oplus a_{1110} x_1 x_2 x_3 \oplus a_{1101} x_1 x_2 x_4 \oplus a_{1101} x_1 x_2 x_4 \oplus a_{1011} x_1 x_3 x_4 \oplus a_{0111} x_2 x_3 x_4 \oplus a_{1111} x_1 x_2 x_3 x_4$$
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{0000} \oplus a_{1000} x_1 \oplus a_{0100} x_2 \oplus a_{0010} x_3 \oplus a_{0001} x_4 \oplus a_{1100} x_1 x_2 \oplus a_{1010} x_1 x_3 \oplus a_{1001} x_1 x_4 \oplus a_{0110} x_2 x_3 \oplus a_{0101} x_2 x_4 \oplus a_{0011} x_3 x_4 \oplus a_{1110} x_1 x_2 x_3 \oplus a_{1101} x_1 x_2 x_4 \oplus a_{1011} x_1 x_3 x_4 \oplus a_{0111} x_2 x_3 x_4 \oplus a_{1111} x_1 x_2 x_3 x_4$$

Так как $f(0,0,0,0)=0$, то $a_{0000}=0$.

Далее подставляем все остальные наборы в порядке возрастания числа единиц, подставляя вновь полученные значения в следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 f(1,0,0,0) &= a0000 \oplus a1000 = 1 \Rightarrow a1000 = 1 \\
 f(0,1,0,0) &= a0000 \oplus a0100 = 0 \Rightarrow a0100 = 0 \\
 f(0,0,1,0) &= a0000 \oplus a0010 = 0 \Rightarrow a0010 = 0 \\
 f(0,0,0,1) &= a0000 \oplus a0001 = 0 \Rightarrow a0001 = 0 \\
 f(1,1,0,0) &= a0000 \oplus a1000 \oplus a0100 \oplus a1100 = 1 \Rightarrow a1100 = 0 \\
 f(1,0,1,0) &= a0000 \oplus a1000 \oplus a0100 \oplus a1010 = 0 \Rightarrow a1010 = 1 \\
 f(1,0,0,1) &= a0000 \oplus a1000 \oplus a0100 \oplus a1001 = 0 \Rightarrow a1001 = 1 \\
 f(0,1,1,0) &= a0000 \oplus a0100 \oplus a0010 \oplus a0110 = 1 \Rightarrow a0110 = 1 \\
 f(0,1,0,1) &= a0000 \oplus a0100 \oplus a0001 \oplus a0101 = 0 \Rightarrow a0101 = 0 \\
 f(0,0,1,1) &= a0000 \oplus a0010 \oplus a0001 \oplus a0011 = 0 \Rightarrow a0011 = 0 \\
 f(1,1,1,0) &= a0000 \oplus a1000 \oplus a0100 \oplus a0010 \oplus a1100 \oplus a1010 \oplus a0110 \oplus a1110 = 1 \Rightarrow a1110 = 0 \\
 f(1,1,0,1) &= a0000 \oplus a1000 \oplus a0100 \oplus a0001 \oplus a1100 \oplus a1001 \oplus a0101 \oplus a1101 = 0 \Rightarrow a1101 = 0 \\
 f(1,0,1,1) &= a0000 \oplus a1000 \oplus a0010 \oplus a0001 \oplus a1010 \oplus a1001 \oplus a0011 \oplus a1011 = 1 \Rightarrow a1011 = 0 \\
 f(0,1,1,1) &= a0000 \oplus a0100 \oplus a0010 \oplus a0001 \oplus a0110 \oplus a0101 \oplus a0011 \oplus a0111 = 0 \Rightarrow a0111 = 1 \\
 f(1,1,1,1) &= a0000 \oplus a1000 \oplus a0100 \oplus a0010 \oplus a0001 \oplus a1100 \oplus a1010 \oplus a1001 \oplus a0110 \oplus a0101 \oplus \\
 & a0011 \oplus a1110 \oplus a1101 \oplus a1011 \oplus a0111 \oplus a1111 = 0 \Rightarrow a1111 = 1
 \end{aligned}$$

Таким образом, полином Жегалкина выглядит так:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_4 \oplus x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 x_4 \oplus x_1 x_2 x_3 x_4$$

Задание 1. Представьте в виде полинома Жегалкина функции:

1. $xy \vee xz$.
2. $xy \vee \bar{x}z$.
3. $x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$.
4. $\bar{x}yz \vee \bar{y}\bar{z}$.
5. $(y \rightarrow z) \vee xz$.
6. $(x \oplus y) \vee (x \downarrow y)$.
7. $x \downarrow (x \rightarrow \bar{y} \vee \bar{z})$.

Контрольные вопросы:

1. Как представить булеву функцию в виде СДНФ, СКНФ, полинома Жегалкина?
2. Обоснуйте применение логических соотношений в процессе преобразования булевых функций в СДНФ, СКНФ и полином Жегалкина.