

Практическое занятие №5

Тема: «Приведение формул логики к ДНФ, КНФ с помощью равносильных преобразований».

Цель: научиться представлять булеву функцию в совершенной дизъюнктивной и конъюнктивной нормальной формах.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Повторение теоретического материала:

- Элементарной дизъюнкцией (конъюнкцией) называется выражение, состоящее из конечного числа переменных и их отрицаний, взятых в этом выражении не более одного раза и разделенных операциями дизъюнкции (конъюнкции).

Пример: $x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}$; $\overline{\overline{x_1}x_2x_3}$ - элементарные конъюнкции; $\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$ - элементарная дизъюнкция.

- Дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой называется дизъюнкция(конъюнкция) конечного числа элементарных дизъюнкций (конъюнкций). Сокращенно обозначается ДНФ (КНФ).

- Нормальная форма называется совершенной, если в каждой ее элементарной конъюнкции (дизъюнкции) представлены все переменные, входящие в данную функцию (либо сами, либо с отрицанием).

- Любая булева функция и любая формула алгебры логики могут быть представлены множеством различных дизъюнктивных (конъюнктивных) форм, равносильных между собой.

Например: $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 = x_1 \vee \overline{x_1}x_2x_3 = x_1 \vee \overline{x_2x_3} = x_1x_2x_3 \vee \overline{x_1x_2x_3}$ и т.д.

- Из всех различных ДНФ (КНФ) функция $F(x_1, x_2, x_3)$ особо выделяется последнее логическое выражение, которое является совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) формой, сокращенно СДНФ (СКНФ).

- На СДНФ (СКНФ) накладываются следующие требования:

а) формула не является тождественно-ложной,

б) формула приведена к одному из видов ДНФ (КНФ),

в) из формулы удалены элементарные конъюнкции(дизъюнкции), включающие одновременно переменную и ее отрицание, согласно законам инверсии: $a \vee \overline{a} = 1$ и $a \cdot 1 = a$, $a \wedge \overline{a} = 0$, $a \cdot 0 = 0$.

г) из формулы удалены одинаковые элементарные конъюнкции (дизъюнкции), кроме одной, согласно правилам идемпотентности: $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$.

- Рассмотрите пример:

Привести булеву функцию $F(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x_1} \rightarrow x_2x_3} \cdot (x_2 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3))$ к совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ).

Решение.

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1 \rightarrow x_2 x_3} \cdot (x_2 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3)) = \overline{x_1 \vee x_2 x_3} \cdot (\overline{x_2} \vee (\overline{x_1} \vee x_3)) = (x_1 \cdot \overline{x_2 x_3}) \cdot (\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_3}) = \\ &= (x_1 \vee 0)(0 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_3) = (x_1 \vee x_2 \overline{x_2})(x_1 \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_3) = \\ &= (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2}) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \cdot (\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \overline{x_3}) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \overline{x_3}) \cdot \\ &= (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \cdot \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_3). \end{aligned}$$

Индивидуальные задания для решений:

1 вариант

1. Проверьте, являются ли булевы функции эквивалентными:

$$F_1 = X \rightarrow (Y \equiv Z) \text{ и } F_2 = (X \rightarrow Y) \equiv (X \rightarrow Z);$$

2. По заданной функции постройте таблицу истинности, приведите функцию к СКНФ.

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x_3}) \cdot x_2$$

2 вариант

1. Проверьте, являются ли булевы функции эквивалентными:

$$F_1 = X \cdot (Y \equiv Z) \text{ и } F_2 = (XY) \equiv (XZ);$$

2. По заданной функции постройте таблицу истинности, приведите функцию к СДНФ.

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x_3}) \cdot x_2$$

3 вариант

1. Проверьте, являются ли булевы функции эквивалентными:

$$F_1 = X \rightarrow (Y \vee Z) \text{ и } F_2 = (X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow Z);$$

2. По заданной функции постройте таблицу истинности, приведите функцию к СКНФ.

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3)$$

4 вариант

1. Проверьте, являются ли булевы функции эквивалентными:

$$F_1 = \overline{XZ} \vee XY \vee X\overline{Z} \text{ и } F_2 = XYZ \vee \overline{XZ};$$

2. По заданной функции постройте таблицу истинности, приведите функцию к СДНФ.

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3).$$

Контрольные вопросы:

1. Какой процесс называется минимизацией булевых функций?
2. Какие разновидности нормальных форм булевой функции вы знаете?
3. Какая форма булевой функции называется СДНФ?
4. Какая форма булевой функции называется СКНФ?