Практическое занятие №3

Тема: «Теория отображений и алгебра подстановок**».**

Цель: научиться применять элементы теории отображений и алгебры подстановок при решении задач.
Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.
Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Бинарной операцией на множестве А называется любое отображение σ декартова квадрата множества А в себя, т. е. $\sigma: A\times A\to A$.

Иначе говоря, любой паре *(a,b)*, принадлежащей A^2, ставится в соответствие единственный элемент *c* из А. Обозначают a σ b=c.

Пусть М – конечное множество $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$. Любую биекцию удобно задавать следующей таблицей:

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \dots & \sigma(a_n) \end{pmatrix}.$$

Такая таблица называется ***подстановкой степени n*** множества М.

Часто М записывают в виде номеров, если оно конечно, т.е. М={1,2,…,n}. Тогда

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Если аргументы расположены в порядке возрастания, запись подстановки такого вида называют ***канонической*** и записывают $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \dots\sigma_n)$. Переставляя столбцы (при этом сама подстановка не меняется), можно верхнюю строку привести к упорядоченному виду.

Число подстановок *n*-ой степени определяется формулой $|S_n|=n!$.

Подстановка вида σ=(1, 2, …, n)= *e* называется ***тождественной***, так как $\forall a\in M$, $e(x)=x$.

Под ***алгеброй*** понимают упорядоченную пару <A,O>, где А – непустое множество (носитель алгебры), а О – некоторое множество операций, заданных на этом множестве А.

Рассмотрим на этом множестве операцию композиции: $\sigma=\sigma_2\circ\sigma_1=\sigma_2(\sigma_1)$. Данная операция будет являться бинарной на этом множестве. Т.е. какие бы два элемента множества S_n мы не взяли, их композиция окажется элементом этого множества. $S_n=\langle S_n, \circ\rangle$ - алгебра подстановок.

Натуральной степенью подстановки σ называется подстановка $\sigma^n=\sigma\circ\sigma\circ\dots\circ\sigma_1$, т.е. произведение *n* функций, каждая из которых есть σ. Очевидно, что степень подстановки не зависит от порядка множителей.

Свойства композиции подстановок.

1. Умножение выполняется только для подстановок одинаковой степени.
2. $\sigma_2\circ\sigma_1\neq\sigma_1\circ\sigma_2$.
3. $\sigma_1\circ(\sigma_2\circ\sigma_3)=(\sigma_1\circ\sigma_2)\circ\sigma_3$.
4. $\sigma\circ e=e\circ\sigma=\sigma$.
5. Поскольку любая подстановка σ — биекция, для нее существует единственная обратная функция σ^{-1}, тоже являющаяся подстановкой, т.е. $\sigma\circ\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\circ\sigma=e=\sigma^0$.
6. $e^{-1}=e$; $e^n=e$, $n\in Z$.
7. $\sigma^m\circ\sigma^n=\sigma^{m+n}$, $m,n\in Z$; $\sigma^{mn}=(\sigma^m)^n=(\sigma^n)^m$, $m,n\in Z$.

Для нахождения обратной подстановки необходимо верхнюю строку поменять с нижней и привести её к каноническому виду.

Порядком подстановки назовем наименьшее натуральное число λ, такое что $\sigma^{\lambda}=e$.

Инверсией подстановки называется перемещение (рокировка) двух соседних значений в нижнем ряду канонической записи. При этом подстановка меняется.

Пусть n - число инверсий, приводящих подстановку к единичной. Тогда функция $\varepsilon:=\sigma\to(-1)^n$ называется ***четностью (знаком)*** подстановки. Если $\varepsilon(\sigma)=1$, то подстановка называется ***четной***, если $\varepsilon(\sigma)=-1$, то подстановка называется ***нечетной***.

Алгеброй отношений называется алгебра, в которой носителем является множество всех отношений, а операциями являются операции объединения, пересечения, разности и декартова произведения.

Предполагается, что отношения имеют одинаковую арность. Тогда смысл операций состоит в следующем:

$\rho_1 \vee \rho_2=\{(a_1,a_2,\ldots a_n)|\ \rho_1(a_1,a_2,\ldots a_n)$ или $\rho_2(a_1,a_2,\ldots a_n)\}$;

$\rho_1 \wedge \rho_2=\{(a_1,a_2,\ldots a_n)|\ \rho_1(a_1,a_2,\ldots a_n)$ и $\rho_2(a_1,a_2,\ldots a_n)\}$;

$\rho_1\backslash\rho_2=\{(a_1,a_2,\ldots a_n)|\ \rho_1(a_1,a_2,\ldots a_n)$ – выполняется, а $\rho_2(a_1,a_2,\ldots a_n)$ – не выполняется$\}$;

операция $\rho_1\times\rho_2$ состоит в том, что каждому набору, удовлетворяющему первому отношению, приписывается набор, удовлетворяющий второму отношению.

Пример 1. Пусть А множество натуральных чисел, A=N. Рассмотрим операцию “+” и “-”. Являются ли они бинарными?

Решение: $(5,7)\to12$, т. е. $5+7=12$, $12\in N$. Известно, что при сложении двух натуральных чисел получим натуральное число, следовательно операция бинарная. Операция “-” не является бинарной операцией на множестве A=N, т. к. $5-7=-2$, а $-2\notin N$.

Пример 2. Рассмотрим множество $M=\{1,2,3\}$. Сколько на этом множестве можно задать биективных функций, отображающих М в М.

Решение: Это множество всех подстановок третьего порядка S_3.

$$S_3=\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\}.$$

Пример 3. Даны две подстановки: σ_1 и σ_2. Приведите подстановки к канонической записи и найдите их композицию $\sigma_1\circ\sigma_2$ и $\sigma_2\circ\sigma_1$.

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&5&4&3&2\\3&5&2&4&1\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix}.$$

Решение: Вторая подстановка записана в каноническом виде, а первая- нет. Поэтому в верхней строке запишем числа от 1 до 5, а в нижней $\sigma_1(1)=3$, $\sigma_1(2)=1$, $\sigma_1(3)=4$, $\sigma_1(4)=2$, $\sigma_1(5)=5$. Итак, $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&2&5\end{pmatrix}$

Найдем $\sigma_2\circ\sigma_1$. Сначала выполняется первая подстановка $\sigma_1(1)=3$, а затем вторая $\sigma_2(3)=4$ и т. д. Получим следующую матрицу: $\sigma_2\circ\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&3&5&1\end{pmatrix}$.

Аналогично найдем $\sigma_1\circ\sigma_2$: $\sigma_2(1)=2$, а $\sigma_1(2)=1$, и т. д. В итоге получим

$$\sigma_1\circ\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&2&4&3\end{pmatrix}\neq\sigma_2\circ\sigma_1.$$

Пример 4. Найдите число инверсий и четность подстановки $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&3&1&2&5\end{pmatrix}$

Решение:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{4}$$

$$\xrightarrow{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{7} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{8}$$

$$\xrightarrow{8} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Получили n=10, поэтому $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{10}=1$, т.е. подстановка четная.

Пример 5. Данная таблица определяет отношение реляционной модели данных. Это отношение R_5 является подмножеством декартова произведения $D_1\times D_2\times D_3\times D_4\times D_5$, в котором сомножители D_i являются соответствующими доменами.

Первый домен D_1 – номера групп. D_1={2812, 3812, 3822}.

D_2 – названия изучаемых предметов. D_2={ВМ, ДМ, ОСиС, БД}.

D_3 – фамилии преподавателей. D_3={Иванов, Петров, Сидоров}.

D_4 – даты экзаменов. D_4={3 янв., 5 янв., 9 янв., 10 янв.}.

D_5 – номера аудиторий. D_5={229, 405}.

Тогда эти данные можно свести в таблицу, называемую базой данных.

R_5	**Группа**	**Предмет**	**Фамилия**	**Дата**	**Аудитория**
1	3812	ДМ	Иванов	3 янв.	229
2	4812	ВМ	Петров	3 янв.	405
3	4822	ОСиС	Сидоров	5 янв.	229
4	3812	ОСиС	Сидоров	9 янв.	405
5	4812	ДМ	Иванов	9 янв.	229
6	4822	ДМ	Иванов	10 янв.	229

Выполните над данным отношением следующие операции: выборки (расписание экзаменов профессора Иванова), проекции на атрибуты D_2, D_3.

Решение: Следует обратить внимание на то, что все значения каждого атрибута взяты из соответствующего домена, причем некоторые значения домена могут не присутствовать в отношении.

Результатом операции выборки являются строки, в которых домен D_3 представлен значением «Иванов». Получим в итоге следующее отношение:

1	3812	ДМ	Иванов	3 янв.	229
5	4812	ДМ	Иванов	9 янв.	229
6	4822	ДМ	Иванов	10 янв.	229

Проекция порождает множество пар, каждая из которых определяет дисциплину и экзаменатора. Проекцией исходного отношения на атрибуты D_2, D_3 является таблица вида:

D_2	**D_3**
ДМ	Иванов
ВМ	Петров
ОСиС	Сидоров

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите σ_1^{-1}, σ_2^{-2}, $\sigma_1\circ\sigma_2$ и $\sigma_2\circ\sigma_1$, σ_1^{3}, σ_2^{4}, σ_1^{55}, σ_2^{-99}, порядок, число инверсий и четность каждой из подстановок:

$a)\ \sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix};$ $d)\ \sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&2&5&3\end{pmatrix};$

$b)\ \sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix};$ $e)\ \sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{pmatrix};$

$c)\ \sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&5&3\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&3&5\end{pmatrix};$ $f)\ \sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&5&2&4\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&2&3&1\end{pmatrix};$

2. Найдите по двум заданным таблицам результат операции соединения по домену D_1.

R_5	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	**D_5**
1	3812	ДМ	Иванов	3 янв.	229
2	4812	ВМ	Петров	3 янв.	405
3	4822	ОСиС	Сидоров	5 янв.	229

R_5	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	**D_5**
4	3812	ОСиС	Сидоров	9 янв.	405
5	4812	ДМ	Иванов	9 янв.	229
6	4822	ДМ	Иванов	10 янв.	229

3. В период вступительных экзаменов были сформированы три отношения R_1, R_2 и R_3 со следующими схемами:

R_1=(ФИО, Паспорт, Школа);
R_2=(ФИО, Паспорт, Школа);
R_3=(ФИО, Паспорт, Школа).

Отношение R_1 содержит список абитуриентов, сдававших пробные экзамены. Отношение R_2 содержит список абитуриентов, сдававших экзамены на общих условиях. Отношение R_3 содержит список абитуриентов, принятых в институт. Предполагается, что при неудачной сдаче пробных экзаменов абитуриент мог делать вторую попытку и сдавать экзамены в общем потоке, поэтому некоторые абитуриенты могут присутствовать как в первом, так и во втором отношении. Найдите отношение, которое будет содержать список абитуриентов, которые:

a). Поступали два раза и не поступили в вуз.
b). Поступили в вуз с первого раза.
c). Поступили в вуз только со второго раза.
d). Поступали только один раз и не поступили.

Контрольные вопросы:

1. Понятие отображения.
2. Взаимооднозначные отображения.
3. Понятие подстановки. Формула количества подстановок.
4. Произведение подстановок. Обратная подстановка. Степень подстановки.