Практическое занятие №2

Тема: «Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера-Венна»**.**

Цель: получить навыки в выполнении операций над множествами с использованием диаграмм Эйлера-Венна и специальных программных средств.
Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.
Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Пример 1. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проиллюстрируем соотношения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (рис. 1).

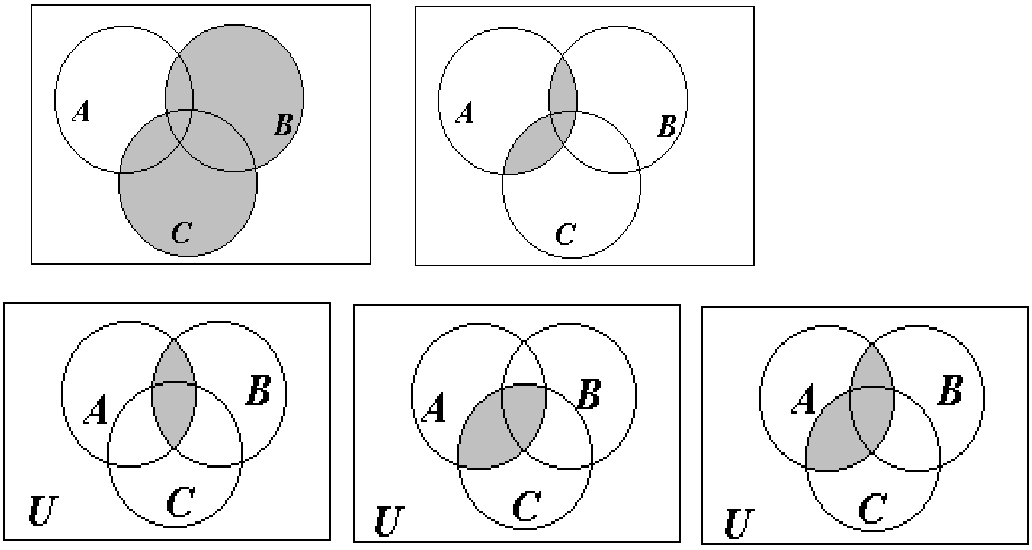


Рис. 1.

Убеждаемся, что в обоих случаях получаем равные множества. Следовательно, исходное соотношение справедливо.

Для произвольных множеств A, B, и C справедливы следующие соотношения (табл. 1):

Таблица 1

1. Коммутативность объединения $A \cup B = B \cup A$	1'. Коммутативность пересечения $A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность объединения $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	2'. Ассоциативность пересечения $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Дистрибутивность объединения относительно пересечения $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3'. Дистрибутивность пересечения относительно объединения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A \cup \varnothing = A$	4'. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A \cap U = A$

$A\cup\overline{A}=U$ $A\cup U=U$	$A\cap\overline{A}=\varnothing$ $A\cap\varnothing=\varnothing$
5. Закон идемпотентности объединения $A\cup A=A$	5'. Закон идемпотентности пересечения $A\cap A=A$
6. Закон де Моргана $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	6'. Закон де Моргана $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
7. Закон поглощения $A\cup(A\cap B)=A$	7'. Закон поглощения $A\cap(A\cup B)=A$
8. Закон склеивания $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$	8'. Закон склеивания $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})=A$
9. Закон Порецкого $A\cup(\overline{A}\cap B)=A\cup B$	9'. Закон Порецкого $A\cap(\overline{A}\cup B)=A\cap B$
10. Закон двойного дополнения $\overline{\overline{A}}=A$	

Пример 2.

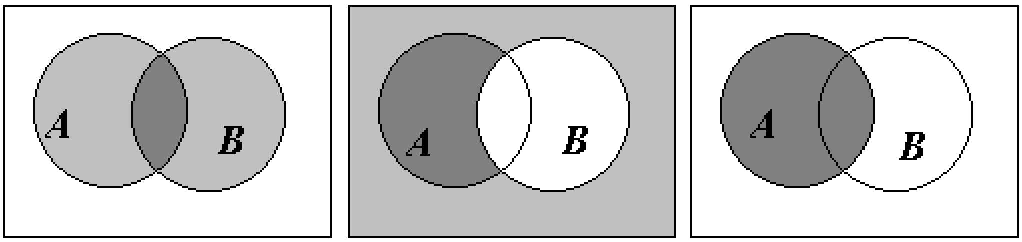
Доказать следующее тождество $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$.

Решение**.**

Докажем это тождество двумя способами: аналитически (используя равносильности алгебры множеств) и конструктивно (используя диаграммы Эйлера-Венна).

1.
$$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=(A\cup(A\cap\overline{B}))\cap(B\cup(A\cap\overline{B}))=A\cap((B\cup A)\cap(B\cup\overline{B}))=A\cap((B\cup A)\cap U)=$$
$$=A\cap(B\cup A)=A$$

2. Построим соответствующие диаграммы Эйлера-Венна (рис. 2).



$A\cap B$ $\quad$ $A\cap\overline{B}$ $\quad$ $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$

Рис. 2

Пример 3. Описанные выше операции с множествами проиллюстрируем примерами. Предположим, что элементы пространства S – натуральные числа от 1 до 6, т.е. S={1, 2, 3, 4, 5, 6} и определим следующие подмножества: A={2, 4, 6}; B={1, 2, 3, 4}; C={1, 3, 5}.

Учитывая приведенные соотношения можно записать:

(A∪B)={1, 2, 3, 4, 6}, (B∪C)={1, 2, 3, 4, 5}

(A∪B∪C)={1, 2, 3, 4, 5, 6}=S=A∩C,

A∩B={2, 4}, B∩C={1, 3}, A∩C=∅,

A∩B∩C=∅, $\bar{A}$={1, 3, 5}=C, $\bar{B}$={5, 6},

$\bar{C}$={2, 4, 6}=A, A-B={6}, B-A={1, 3},

A-C={2, 4, 6}=A, C-A={1, 2, 5}=C,

B-C={2, 4}, C-B={5}.

3. Задания

1. Студент должен составить четыре выражения (выбрав четыре варианта взаиморасположения множеств на диаграмме Эйлера-Венна), каждое из которых содержит по четыре конкретных множества (например, числовой природы) с операциями над ними. Вычислить значения этих выражений так, как это сделано в примере 2, и проиллюстрировать процесс вычисления − нарисовать результаты и все промежуточные вычисления в виде диаграмм Эйлера-Венна так же, как в примере 3.

Из всех вариантов взаиморасположения множеств выбрать четыре наиболее информативные с точки зрения изучаемых операций с множествами.

2. Упростить заданное алгебраическое выражение, используя свойства операций над множествами. Выражение выбирается в соответствии с номером в журнале.

Состав отчета по лабораторной работе

1. Краткие теоретические сведения.

2. Четыре выбранных выражения и варианты взаиморасположения множеств.

3. Диаграммы Эйлера - Венна с последовательным выполнением заданных операций.

4. Словесное описание результатов операций.

5. Описание последовательности операций упрощения заданного выражения.

1. $M = \left[(X \cup Y)/(X \cup \bar{Y})\right]/\left(\overline{X \cup Y}\right) \cap \bar{Y}$
2. $M = \left[(\bar{X} \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y})\right]/\left(\overline{X \cup \bar{Y}}\right) \cap \bar{Y}$
3. $M = \left[(X \cup \bar{Y})/\left(\overline{Y \cup X}\right)\right] \cup \left[\overline{\bar{X}/(Y \cup \bar{X})}\right]$
4. $M = (X \cap \bar{Y}) \cup \left(\overline{\bar{X} \cup \bar{Y}}\right) \cap \left[\overline{X/(X \cap \bar{Y})}\right]$
5. $M = \left[(\bar{X} \cup Y) \cap \left(\overline{\bar{X} \cup \bar{Y}}\right)\right]/\left[\left(\overline{\bar{X} \cap \bar{Y}}\right) \cup \left(\overline{X \cap Y}\right)\right]$
6. $M = \left[(X \cup Y) \cup \left(\overline{X \cup \bar{Y}}\right)\right] \cup \left[\overline{X \cup (X \cap \bar{Y})}\right]$
7. $M = \left[\left(\overline{X \cup \bar{Y}}\right) \cup Y\right] \cap \left[\left(\bar{X} \cup \left(\overline{Y \cap \bar{X}}\right)\right)/\bar{X}\right]$

8. $M=\left[(X\cup\bar{Y})/\left(\overline{\bar{X}\cup\bar{Y}}\right)\right]\cap\left[(X\cup\bar{Y})\cap\left(\overline{X\cup\bar{Y}}\right)\right]$

9. $M=\left[(\bar{X}\cup\bar{Y})\cap\left(\overline{\bar{X}\cup\bar{Y}}\right)\right]\cup\left[\overline{(\bar{X}\cup Y)/\left(\overline{X\cap Y}\right)}\right]$

10. $M=\left[\left(\overline{X\cup Y}\right)/\left(\overline{X\cap\bar{Y}}\right)\right]\cup\left[(\bar{X}\cap Y)/(X\cap\bar{Y})\right]$

11. $M=\left[\bar{X}\cap\left(\overline{\bar{X}\cap\bar{Y}}\right)\cup\left(\overline{X\cap\bar{Y}}\right)\right]/\left[\overline{Y\cap\left(\overline{X\cup Y}\right)}\right]$

12. $M=\left[\overline{(\bar{X}\cup Y)\cap(X\cup\bar{Y})}/\overline{(X\cap\bar{Y})\cup(X\cup Y)}\right]$

13. $M=\left[\overline{X\cup(X\cap\bar{Y})\cup(X\cap\bar{Y})}/(X\cap Y)\cup\bar{X})\right]$

14. $M=\left[\overline{X\cup\left(\overline{X\cap Y}\right)}/\left(\overline{\bar{X}\cap\bar{Y}}\right)\cup\left(\overline{\overline{X\cup Y}}\right)\cap\bar{Y}\right]$

15. $M=\left[\overline{(\bar{X}\cap\bar{Y})/\left(\overline{Y\cap X}\right)}\right]\cup\left[\left(\overline{\bar{X}\cup\bar{Y}}\right)/Y\right]$

16. $M=\left[(\bar{X}\cup Y)/(\overline{X\cup(Y\cap X)}\right]\cup\left(\overline{X\cup Y}\right)/X$

17. $M=\left[\left(\overline{\bar{X}\cup Y}\right)/(\bar{Y}\cup(\bar{Y}\cap\bar{X})\right]\cap(\bar{X}\cup(X\cap Y))$

18. $M=\left[(\bar{X}\cup Y)\cap\left(\overline{\bar{X}\cap Y}\right)\right]\cup\left[\overline{(X\cap Y)/(Y\cup\bar{X})}\right]$

19. $M=\bar{X}\cup(X\cup Y)\cap\left(\bar{X}\cup\left(\overline{X\cup\bar{Y}}\right)\right)\cup\left(\overline{X\cap Y}\right)$

20. $M=\left[\left(\overline{\bar{X}\cup Y}\right)/(X\cup\bar{Y})\right]\cup\left[X\cap(\bar{X}\cup Y)/\left(\overline{X\cap Y}\right)\right]$

21. $M=\left[\overline{X\cap\left(\overline{X\cup Y}\right)}/\left(\overline{\bar{Y}\cup\bar{X}}\right)\right]\cap[\overline{X\cup(\bar{Y}\cup X)}$

22. $M=\left[\overline{X\cup(X\cap Y)}/(X\cap(\bar{X}\cup Y)\right]\cup[\overline{\bar{X}\cup\bar{Y}})$

23. $M=\overline{\left[\left(\overline{\bar{X}\cup Y}\right)\right]/(X\cap\bar{Y})}\cup\left[\left(\overline{X\cup Y}\right)\cap\bar{Y}\right]$

24. $M=(X(X\cap Y)\cup\bar{X})/\left[\left(\overline{X\cup\bar{Y}}\right)/\left(\overline{\bar{X}\cup Y}\right)\right]$

25. $M=\left[\overline{(X\cup Y)\cup\bar{X}\cup(Y\cup\bar{X})}\cup\left(\overline{X\cup(\bar{Y}\cup X)\cup X}\right)\right]$

26. $M=\left(Y\cup\left(\overline{\bar{Y}\cup X}\right)\right)/\left(\overline{X\cup(X\cup Y)\cap(\bar{X}\cup Y)}\right)$

27. $M=\left[\left(\overline{\bar{X}\cup(\bar{X}\cap Y)}\right)/(X\cup Y)/(X\cap\bar{Y})\cup X\right]$

28. $M=\left[\overline{Y\cup(\bar{X}\cap\bar{Y})}/(X\cup\bar{Y})\right]\cup\left[\left(\overline{\bar{X}\cup\bar{Y}}\right)/\bar{X}\right]$

29. $M=\left[\overline{\left(\overline{X\cap Y}\right)/(X\cap Y)}\right]\cup\overline{\left(\overline{\bar{X}\cap\bar{Y}}\right)\cup(\bar{Y}\cap X)}$

30. $M=\left[(X\cup\bar{Y})\cup Y\right]/\left[\overline{(X\cup Y)\cap(X\cup Y\cap\bar{X})}\right]\cap\bar{X}$

Контрольные вопросы:

1. Что такое множество? Как обозначают пустое множество, универсальное? Запишите множества натуральных, целых, рациональных, вещественных чисел.
2. Дайте определение подмножества. Какие множества называются равными?
3. Запишите объединение, пересечение, дополнение, симметрическую разность двух множеств.
4. Что означает выражение «декартово произведение множеств»? Покажите на своем примере.