Практическое занятие №1

Тема: «Множества и основные операции над ними**».**

Цель: Усвоить понятие «множество» и способы задания множеств. Уметь строить отношения между множествами.
Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.
Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Пример 1. Задать три множества A, B, C из строчных букв русского алфавита. Сравнить их между собой.
Решение.
Задаем три множества A, B, C. Множество A={а, б, с, д}; B={а, б, с, д, к, м};
C={а, б, с, д, с, м, б, а, к}. Множество A является подмножеством множеств B и C. Множество C равно множеству B, так как состоит из одних элементов.
Пример 2.
Заданы три множества X,Y, Z. Множества равны: X{9,1,5}; Y={2 , 5 , 1, 7, 9};
Z={1, 2, 9, 1, 5, 2, 7, 5, 7}. Сравнить их между собой.
Решение.
Множество X является подмножеством множеств Y и Z, так как все элементы множества X входят как в множество Y, так и в Z. Множество Z равно множеству Y, так как они состоят из одних и тех же элементов.
Пример 3. Пусть A = {1, 3, 5, 7}; B = {2, 4, 6, 8}; C = {1, 2, 3, 4, 5}.
Найдите $A\cup C$, $B\cap C$, A\C и B+C.
Решение.
$A\cup C$ = {1, 2, 3, 4, 5, 7}; $B\cap C$ = {2, 4}; A\C= {7};
B+C = (B\C)U(C\B) = {6, 8}U{1, 3, 5} = {6, 8, 1, 3, 5}.
Пример 4. Пусть A = {x, y} и B = {1, 2, 3}.
Найдите декартовы произведения: A×B, B×A и B×B.
Решение.
Прямым произведением A×B является множество: {(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)}.
Прямое произведение B×A: {1, x), 2, x), 3, x), (1, y), (2, y), (3, y)}.
Множества A×B и B×A различны!
Прямым произведением B×B служит множество: {1, 1), 1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}.

Мощность прямого произведения конечных множеств A и B равна:

$$|A \times B| = mn, \text{ если } |A| = m \text{ и } |B| = n.$$

Если одно из них или сразу оба бесконечны, то и произведение будет иметь бесконечное число упорядоченных пар.

Пример 5. Пусть $B = \{0, 1\}$. Опишите множество B^n.
Решение. Множество *B* состоит из последовательностей нулей и единиц длины *n*. Они называются строкой бит или битовой строкой длины *n*.
Покажем, как строка бит применяется для моделирования операций на конечных множествах.

Пусть $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, \dots s_n\}$. Если $A \subset S$, мы поставим ему в соответствие n-битную строку $(b_1, b_2, \dots b_n)$, где $b_i = 1$, если $s_i \in A$ и $b_i = 0$ в противном случае. Такая строка бит называется ***характеристическим вектором подмножества А.***

Теперь мы можем имитировать операции на множествах логическими операциями, применяемыми к соответствующим характеристическим векторам, условившись считать 1 за **И**, а 0 за **Л**.

Пример 6. Пусть S = {1, 2, 3, 4, 5}, A = {1, 3, 5} и B = {3, 4}. Выписать характеристические векторы A и B, а затем определить характеристические векторы множеств $A \cup B$, $A \cap B$ и $\overline{B}$.

Решение. Характеристическим вектором множества A является a = (1, 0, 1, 0, 1), а характеристический вектор множества B равен b = (0, 0, 1, 1, 0). Значит,

a или b = (1, 0, 1, 0, 1) или (0, 0, 1, 1, 0) =(1, 0, 1, 1, 1);

a и b = (1, 0, 1, 0, 1) и (0, 0, 1, 1, 0) = (0, 0, 1, 0, 0);

не b = не (0, 0, 1, 1, 0) = (1, 1, 0, 0, 1).

Полученные векторы позволяют нам «без запинки прочитать» элементы требуемых подмножеств: $A \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$ и $\overline{B} = \{1, 2, 5\}$.

Индивидуальные задания

1. Определить в каких отношениях находятся между собой три множества:

1) A{1, 3}; B – множество нечетных положительных чисел; C – множество решений уравнения $X^2–4X+3=0$.

2) A={1, 2, 3}; B={2, 3}; C – множество решений уравнения X−1=0.

3) U={1, 2, 3, … , 20}, A – множество четных чисел, B – множество нечетных чисел.

4) A – множество решений уравнения $2X^2–8X+6=0$; B – множество решений уравнения X-1=0; N – множество натуральных чисел.

5) A={a, b, c}; B={a, b, d}; C={b, c}.

6) A={a, b}; B={a, c}; C={a, b, c}.

7) A={a}; B={{a}, {b}}; C={b}.

8) A – множество решений уравнения X–5=0; B – множество решений уравнения $X^2–9=0$; C={{5}, {3}}.

9) A – множество решений уравнения $X^2–4X+3=0$; B={{1}, {3}}; C – множество нечетных натуральных чисел.

10) A={a, b, c}; B={{c}}; C={c}.

11) A={a, b}; B={b, c}; C={a}.

12) A={a}; B={b}; C={a, b, c}.

2. Приняв множество первых 20 натуральных чисел в качестве универсума U, запишите его подмножества: A – четных чисел; B – нечетных чисел; C – квадратов чисел; D – простых чисел; и запишите множества, которые получатся в результате следующих операций:

1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A \cap C$; 4) $A \cap D$; 5) C – A; 6) C – B; 7) C+D; 8) U – A;
9) U – B; 10) U – D; 11) U – A; 12) $A \cup B$.

3. Исходя из отношения принадлежности ($\in$) докажите тождественность:

1) $A \cup (B - A) = A \cup B$;
2) $A \cap (B - A) = \varnothing$;
3) $A - (A \cap B) = A - B$;
4) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$;
5) $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$;
6) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;
7) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$;
8) $A \cap B \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$;
9) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
10) $A \cup \overline{A} = U$;
11) $A \cup U = U$;
12) $C - (A \cap B) = (C - A) \cap (C - B)$.

4. Докажите тождественность, используя свойства операций над множествами:
1) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = B \cap C$;
2) $((A \cap X) \cup (B \cap \overline{X})) \cup ((C \cap X) \cup (D \cap \overline{X})) = ((A \cup C) \cap X) \cup ((B \cup D) \cap \overline{X})$
3) $(A \cap B \cap C \cap \overline{X}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap X) = C$;
4) $\neg((A \cap X) \cup (B \cap X)) = (\overline{A} \cap \overline{X}) \cap (\overline{B} \cap \overline{X})$;
5) $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$;
6) $A \cap \overline{B} \cup B = A \cap B$;
7) $A - (A - B) = B - (B - A)$;
8) $(A - B) - C = (A - C)(B - C)$;
9) $(M - N) \cap (N - M) = \varnothing$;
10) $A \cap (A \cup B) = A$;
11) $\neg(A \cap B) = \overline{A} \cup \overline{B}$;
12) $\neg(A \cup B) = \overline{A} \cap \overline{B}$.

5. Пусть U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} — универсальное множество. Выпишите характеристические векторы подмножеств: A = {1,2,4,5} и B = {3,5}. Найдите характеристические векторы подмножеств $A \mathrm{U} \overline{B}$ и A+B, после чего перечислите их элементы.

Контрольные вопросы:

1. Что такое множество? Как обозначают пустое множество, универсальное? Запишите множества натуральных, целых, рациональных, вещественных чисел.
2. Дайте определение подмножества. Какие множества называются равными?
3. Запишите объединение, пересечение, дополнение, симметрическую разность двух множеств.
4. Что означает выражение «декартово произведение множеств»? Покажите на своем примере.