Практическое занятие №14

Тема: «Работа машины Тьюринга»**.**

Цель: Научиться реализовывать алгоритмы с помощью машины Тьюринга.
Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.
Время выполнения: 2 часа.

Теоретические сведения

Конечные автоматы

Определение, способы представления конечного автомата

Конечный автомат содержит управляющее устройство, входной и выходной каналы. Для управляющего устройства выделено начальное состояние q_0. Работа автомата осуществляется в дискретные такты времени t= 1, 2, 3, …. На входной канал автомата последовательно поступают символы $x_1, x_2, \ldots,$ при этом управляющее устройство изменяет свое состояние, а на выходе появляются выходные символы $y_1, y_2, \ldots$. Работа автомата определяется системой команд, каждая из которых имеет вид $q_i x_r \to q_j y_s$, где q_i, q_j – внутренние состояния автомата, x_r – входной символ, y_s – выходной символ. Обычно требуют, чтобы выполнялось условие однозначности, т.е. не может быть двух команд с одинаковыми левыми и различными правыми частями. Такой автомат называется детерминированным. Выходной символ, вырабатываемый автоматом, зависит не только от входного символа на текущем такте времени, но и от внутреннего состояния. В свою очередь, внутреннее состояние автомата зависит от входных символов, поступивших в предыдущие такты времени. В этом смысле автомат обладает памятью.

Дадим формальное определение конечного автомата. *Конечный автомат* $M=(Q, X, Y, \delta, \lambda)$, где $Q=\{q_0, q_1, \ldots, q_k\}$ – конечное множество внутренних состояний автомата, $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – множество входных символов (входной алфавит), $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ – множество выходных символов (выходной алфавит), $\delta(q,x) : Q\times X \to Q$ – функция переходов автомата из одного состояния в другое, $\lambda(q,x) : Q\times X \to Y$ – функция выходов. Состояние автомата соответствует памяти о прошлом, позволяя устранить время как явную переменную. Автомат обычно задают таблицей переходов, в заголовках строк которой стоят все возможные состояния автомата, в заголовках столбцов – все символы входного алфавита, а на пересечениях строк и столбцов – следующее состояние автомата и выходной символ.

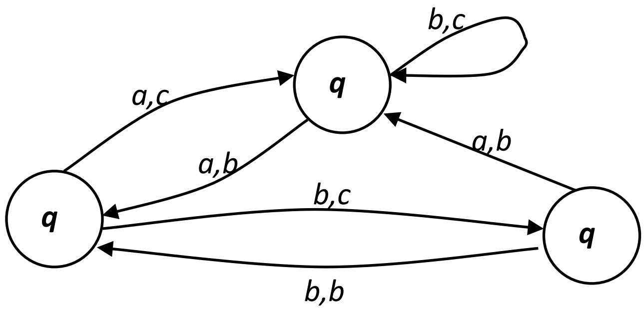
Пример 1. Рассмотрим таблицу переходов некоторого автомата с входным алфавитом $X=\{a, b\}$, выходным алфавитом – $Y=\{b, c\}$, множеством состояний $Q=\{q_1, q_2, q_3\}$.

	a	b
q_1	q_2, c	q_3, c
q_2	q_1, b	q_2, c
q_3	q_2, b	q_1, b

Пусть на вход автомата поступает последовательность символов a, a, b, a. Рассмотрим работу автомата: $q_1 \xrightarrow{a} q_2, c \xrightarrow{a} q_1, b \xrightarrow{b} q_3, c \xrightarrow{a} q_2, b$. На выходе автомата получится последовательность c, b, c, b.

Автомат можно также наглядно задать с помощью ориентированного мультиграфа, называемого *графом переходов состояний*. Вершины этого графа соответствуют состояниям, дуга ведет из вершины q_i в вершину q_j, если $\delta(q_i, x_r)=q_j$ и $\lambda(q_i, x_r)=y_s$, причем каждой дуге приписана пара x_r, y_s. Кратные дуги из вершины q_i в вершину q_j заменяются одной дугой, которой приписаны несколько пар входной – выходной символы.

Пример 5.2. Построим граф переходов состояний для примера 5.1.

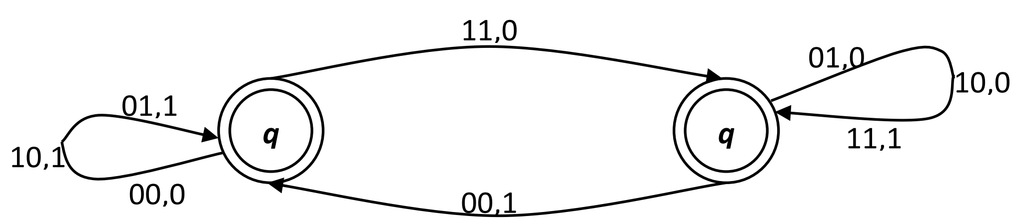


Не любой ориентированный мультиграф, все дуги которого помечены подобным образом, соответствует некоторому автомату. Для соответствия автомату в каждой вершины q_i должны выполняться следующие два условия:

1) для любого входного символа x_r имеется дуга, выходящая из q_i и помеченная x_r (условие полноты);
2) любой символ x_r встречается только на одной дуге, выходящей из q_i (условие детерминированности).

Пример 5.3. Построим граф переходов для двоичного сумматора, который по данным двум n-разрядным двоичным числам вычисляет их сумму. Входные данные начинаются с битов с наименьшими значениями, пары битов читаются справа налево.

Двойная окружность на вершинах означает, что эти состояния – заключительные.



Пусть суммируются числа 011010 и 001100. Тогда на вход автомата поступает последовательность 00, 10, 01, 11, 10, 00. Рассмотрим работу автомата:

$$q_0 \xrightarrow{00} q_0,0 \xrightarrow{10} q_0,1 \xrightarrow{01} q_0,1 \xrightarrow{11} q_1,0 \xrightarrow{10} q_1,0 \xrightarrow{00} q_0,1.$$

На выходе автомата получим последовательность 0, 1, 1, 0, 0, 1.

1.1 Минимизация конечных автоматов

Два автомата называются эквивалентными, если они для любой последовательности символов из входного алфавита *X* выдают одинаковую последовательность символов из выходного алфавита *Y*. Переход от автомата *M* к эквивалентному автомату называется эквивалентным преобразованием автомата *M*. Можно ставить много задач о поиске автоматов, эквивалентных данному и обладающих заданными свойствами. Наиболее изученной является задача о минимизации числа состояний автомата: среди всех автоматов, эквивалентных автомату *M*, найти автомат с наименьшим числом состояний (минимальный автомат).

Пусть имеется автомат $M=(Q, X, Y, \delta, \lambda)$. Рассмотрим алгоритм Мили поиска минимального автомата. На каждом шаге алгоритма будем строить некоторое разбиение множества состояний *Q* на классы, причем разбиение на каждом шаге алгоритма будет получаться расщеплением некоторых классов предыдущего разбиения.

Шаг 1. Два состояния q и q' относим в один класс C_{1j}, если для каждого символа входного алфавита совпадают выходные символы для этих состояний, т.е. $\lambda(q, x)=\lambda(q',x)$.

Шаг i+1. Два состояния q и q' из одного класса C_{ij} относим в один класс $C_{i+1,j}$, если для каждого символа входного алфавита осуществляется переход из состояний q и q' в состояния, принадлежащие одному и тому же классу C_{is}, т.е. $\delta(q, x)$ и $\delta(q',x)$ принадлежат одному и тому же классу. Если (i+1)-ый шаг не изменяет разбиения, то алгоритм заканчивается. Каждый класс соответствует состоянию минимального автомата.

Пример 5.4. Построим минимальный автомат для автомата, заданного следующей таблицей переходов.

	0	1
1	3,0	2,1
2	1,1	6,0
3	5,0	2,1
4	5,1	6,0
5	5,0	4,1
6	2,0	1,1

Шаг 1. Разбиваем множество состояний на два класса по выходным символам:

1, 3, 5, 6 и 2, 4.

Шаг 2. Рассмотрим переходы в новые состояния для класса 1, 3, 5, 6 при входном символе 0:

1, 3, 5, 6 $\xrightarrow{0}$ 3, 5, 5, 2.

Состояния 3 и 5 принадлежат одному классу, а состояние 2 – другому. Следовательно, делаем разбиение класса 1, 3, 5, 6 на два новых класса: 1, 3, 5 и 6. После этого шага алгоритма имеем три класса: 1, 3, 5; 6 и 2, 4.

Шаг 3. Рассмотрим переходы в новые состояния для класса 1, 3, 5 при входном символе 1: 1, 3, 5 $\xrightarrow{1}$ 2, 2, 4. Так как состояния 2 и 4 находятся в одном классе, то нового разбиения на этом шаге не получим.

Шаг 4. Рассмотрим переходы в новые состояния для класса 2, 4 при входном символе 0: 2, 4 $\xrightarrow{0}$ 1, 5. Так как состояния 1 и 5 находятся в одном классе, то нового разбиения на этом шаге не получим.

Шаг 5. Рассмотрим переходы в новые состояния для класса 2, 4 при входном символе 1: 2, 4 $\xrightarrow{1}$ 6, 6. Нового разбиения на этом шаге не получим.

Окончательно, разбиение на классы имеет вид: 1, 3, 5; 6; 2, 4. Таблица переходов минимального автомата будет иметь следующий вид:

	0	1
1	1,0	3,1
2	3,0	1,1
3	1,1	2,0

Состоянию 1 минимального автомата соответствует класс 1, 3, 5, состоянию 2 – класс 6, состоянию 3 – класс 2, 4.

Практическое задание для самостоятельной работы

Найти минимальный автомат, эквивалентный данному.

Задача 1

	0	1
1	2,0	4,1
2	8,1	7,0
3	8,1	6,0
4	3,0	5,1
5	2,0	4,1
6	4,0	8,1
7	9,0	8,1
8	5,1	3,1
9	2,0	9,1

Задача 2

	0	1
1	2,0	6,1
2	8,1	3,0
3	1,0	8,1
4	9,0	8,1
5	8,1	4,0
6	2,0	9,1
7	5,0	7,1
8	6,1	2,1
9	5,0	9,1

Задача 3

	0	1
1	5,0	9,1
2	3,0	5,1
3	9,1	4,0
4	2,0	9,1
5	6,0	5,1
6	9,1	1,0
7	3,0	8,1
8	6,0	7,1
9	2,1	3,1

Задача 4

	0	1
1	4,1	2,0
2	3,0	4,1
3	5,0	3,1
4	7,1	5,1
5	4,1	8,0
6	1,0	6,1
7	1,0	3,1
8	9,0	4,1
9	5,0	6,1

Задача 5

	0	1
1	6,1	8,1
2	1,1	5,0
3	7,0	1,1
4	2,0	6,1
5	6,0	1,1
6	8,0	7,1
7	8,0	4,1
8	1,1	3,0
9	2,0	7,1

Задача 6

	0	1
1	4,1	9,0
2	5,0	8,1
3	7,0	4,1
4	8,1	5,1
5	4,1	3,0
6	1,0	6,1
7	5,0	2,1
8	1,0	6,1
9	6,0	4,1

Задача 7

	0	1
1	8,0	7,1
2	3,1	4,0
3	5,1	8,1
4	1,0	3,1
5	8,0	5,1
6	9,0	3,1
7	2,0	9,1
8	3,1	6,0
9	2,0	1,1

Задача 8

	0	1
1	9,0	3,1
2	6,1	9,1
3	7,0	1,1
4	6,0	2,1
5	3,0	2,1
6	7,0	8,1
7	2,1	4,0
8	9,0	1,1
9	2,1	5,0

Задача 9

	0	1
1	7,0	5,1
2	1,1	3,1
3	2,1	6,0
4	7,0	4,1
5	3,0	9,1
6	1,0	2,1
7	2,1	8,0
8	5,0	2,1
9	7,0	5,1

Задача 10

	0	1
1	7,1	3,1
2	3,0	5,1
3	1,1	6,0
4	7,0	1,1
5	3,0	2,1
6	2,0	1,1
7	3,0	9,1
8	1,1	4,0
9	8,0	5,1

Задача 11

	0	1
1	2,1	6,0
2	8,1	1,1
3	9,0	3,1
4	7,0	2,1
5	9,0	7,1
6	8,0	2,1
7	1,0	5,1
8	1,0	3,1
9	2,1	4,0

Задача 12

	0	1
1	6,1	8,1
2	1,1	3,0
3	4,0	1,1
4	2,0	4,1
5	6,0	1,1
6	8,0	9,1
7	8,0	7,1
8	1,1	5,0
9	2,0	9,1

Задача 13

	0	1
1	4,0	3,1
2	9,1	8,1
3	8,0	1,1
4	2,1	7,0
5	9,0	2,1
6	8,0	6,1
7	1,0	2,1
8	2,1	5,0
9	4,0	6,1

Задача 14

	0	1
1	7,0	3,1
2	9,0	7,1
3	8,1	4,1
4	3,1	6,0
5	4,0	2,1
6	8,0	3,1
7	4,0	2,1
8	9,0	5,1
9	3,1	1,0

Задача 15

	0	1
1	6,1	4,0
2	8,0	6,1
3	1,0	3,1
4	3,0	6,1
5	1,0	9,1
6	8,1	1,1
7	6,1	2,0
8	7,0	9,1
9	7,0	5,1

Задача 16

	0	1
1	5,1	2,0
2	9,0	5,1
3	8,0	4,1
4	1,0	3,1
5	9,1	1,1
6	1,0	6,1
7	6,0	5,1
8	5,1	7,0
9	8,0	6,1

Задача 17

	0	1
1	2,0	7,1
2	3,0	6,1
3	7,1	9,0
4	7,1	1,0
5	4,0	8,1
6	4,0	5,1
7	2,1	4,1
8	3,0	8,1
9	6,0	7,1

Задача 18

	0	1
1	6,0	9,1
2	2,0	4,1
3	6,0	5,1
4	2,1	6,1
5	7,0	9,1
6	4,1	2,0
7	4,1	8,0
8	5,0	4,1
9	7,0	3,1

Задача 19

	0	1
1	5,0	3,1
2	3,1	7,0
3	4,1	9,1
4	2,0	8,1
5	9,0	6,1
6	9,0	5,1
7	6,0	3,1
8	2,0	6,1
9	3,1	1,0

Задача 20

	0	1
1	2,0	3,1
2	1,0	6,1
3	8,1	4,0
4	6,0	5,1
5	9,1	1,0
6	1,0	8,1
7	1,1	7,1
8	4,0	9,1
9	4,0	2,1

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение машины Тьюринга.
2. Дайте определение следующим понятиям:

-внешний алфавит;

- слово.

3. Какая функция называется вычислимой по Тьюрингу?
4. Опишите принцип работы машины Тьюринга.