

Практическое занятие №13

Тема: «Проверка графа на эйлеровость, гамильтоновость, плоскость».

Цель: Закрепить знания основных понятий теории графов.

Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.

Время выполнения: 2 часа.

Порядок проведения работы

Эйлеровым путём в графе называется путь, содержащий все рёбра графа.

Эйлеровым циклом или эйлеровой цепью называется цикл, содержащий все рёбра графа и притом по одному разу.

Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется эйлеровым графом.

Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется гамильтоновым графом.

Гамильтоновым циклом, или путём в графе, называется цикл, или путь, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу.

Эйлеровы и гамильтоновы пути сходны по способу задания. Первые содержат все рёбра, и притом по одному разу, вторые – все вершины по одному разу. Но, несмотря на внешнее сходство, задачи их отыскания резко отличаются по степени трудности. Для решения вопроса о существовании эйлерова цикла в графе достаточно выяснить, все ли его вершины чётные.

Критерий же существования гамильтонова цикла на произвольном графе ещё не найден.

Однако есть несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов в графе:

1. Всякий полный граф является гамильтоновым, так как он содержит простой цикл, которому принадлежат все вершины данного графа.

2. Если граф, помимо простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие рёбра, то он также является гамильтоновым.

3. Если граф имеет один гамильтонов цикл, то он может иметь и другие гамильтоновы циклы.

Алгоритма проверки существования эйлерова пути

Представим динамику выполнения алгоритма проверки существования эйлерова пути (цикла) из вершины 0 для представленного на рисунке 1 графа.

Цикл существует.

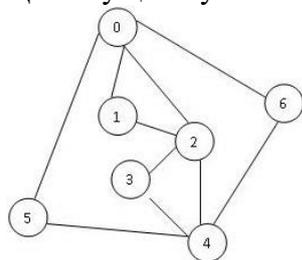


Рисунок 1

Например, один из возможных путей прохождения всех ребер графа из вершины 0 может быть следующим:

$0 - 1 - 2 - 0 - 6 - 4 - 2 - 3 - 4 - 5 - 0$

В приведенном списке вершин, следующих за 0, каждая вершина является одновременно концом предыдущего ребра и началом следующего.

В соответствии с алгоритмом:

$0 - \text{степень } 4; 1 - 2; 2 - 4; 3 - 2; 4 - 4; 5 - 2; 6 - 2;$

Степени всех вершин четные, следовательно, эйлеров цикл в данном графе существует.

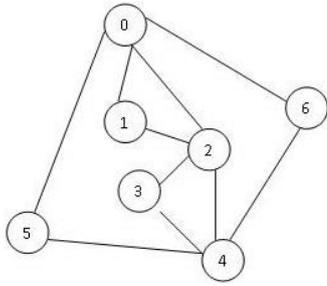


Рисунок 2

Граф, изображенный на рисунке 2 отличается от рисунка 1 только добавлением ребра (3–5).

При этом степени вершин 3 и 5 стали нечетными.

Согласно алгоритму проверки существования эйлерова цикла, основывающемуся на проверке четности степени каждой вершины, в данном графе цикла быть не может.

Однако если учесть следствие, по которому в точности две вершины имеют нечетную степень, то и в графе, изображенном на рисунке 1 должен существовать эйлеров путь.

Пример такого пути: 3 – 2 – 4 – 3 – 5 – 4 – 6 – 0 – 2 – 1 – 0 – 5.

При этом две вершины, имеющие нечетную степень, находятся на концах такого пути.

Алгоритма поиска гамильтонова пути

Представим динамику выполнения рекурсивного алгоритма поиска гамильтонова пути (цикла) из вершины 0 для графа, представленного на рисунке 3.

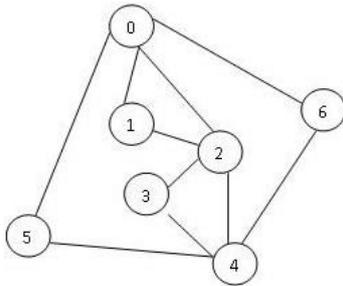


Рисунок 3.

Цикла не существует.

	4-6	2-1	4-3	2-1	0-6	2-1
0-1	2-4	2-3	4-5	2-3	6-4	4-5
1-2	4-3	3-4	4-6	4-3	4-2	
2-3	4-5	4-5	0-5	3-2	2-1	
3-4	4-6	4-6	5-4	2-1	4-3	
4-5	0-2	2-4	4-2	4-6	3-2	

Представим динамику выполнения рекурсивного алгоритма поиска гамильтонова пути для представленного на рисунке 4 графа.

Цикл существует, например: 0 – 6 – 4 – 2 – 1 – 3 – 5 – 0.

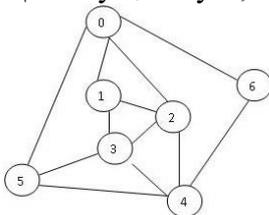


Рисунок 4.

Продемонстрируем поиск цикла от вершины 1.

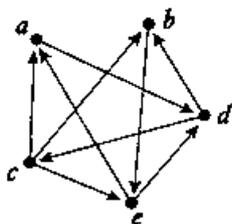
	3-2	4-2	2-3		3-5	4-5
1-0	2-4	4-6	4-6	6-4	4-3	5-3
0-5	4-6	5-4	0-6	4-2	3-2	3-2
5-3	3-4	4-2		2-3	3-5	2-1

Искомый путь $1 - 0 - 6 - 4 - 5 - 3 - 2 - 1$.

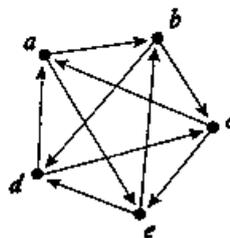
Инструкция к практической работе

1. Какие из следующих ориентированных графов имеют эйлеровы циклы?

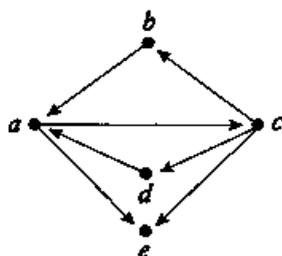
а)



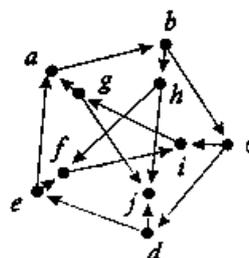
б)



в)



г)



Решение:

а) Граф связный, найдём степени входа и выхода вершин (по теореме 5 степени входа и выхода каждой вершины должны совпадать):

$\text{indeg}(a)=2$, $\text{outdeg}(a)=1$, то есть нашлась вершина, у которой не совпадают степени входа и выхода, значит, граф не имеет эйлерова цикла.

б) Граф связный, найдём степени вершин:

$\text{indeg}(a)=2$ $\text{outdeg}(a)=2$
 $\text{indeg}(b)=2$ $\text{outdeg}(b)=2$
 $\text{indeg}(c)=2$ $\text{outdeg}(c)=2$
 $\text{indeg}(d)=2$ $\text{outdeg}(d)=2$
 $\text{indeg}(e)=2$ $\text{outdeg}(e)=2$

Следовательно, по теореме 5, граф имеет эйлеров цикл.

в) Граф связный, найдём степени вершин:

$\text{indeg}(a)=2$ $\text{outdeg}(a)=2$
 $\text{indeg}(b)=1$ $\text{outdeg}(b)=1$
 $\text{indeg}(c)=3$ $\text{outdeg}(c)=1$

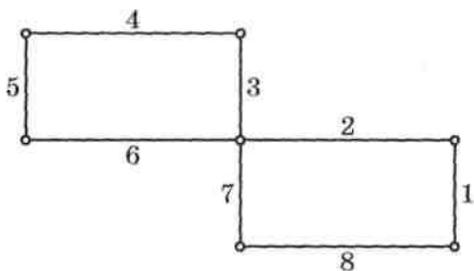
Условия теоремы 5 не выполняются, значит, граф не имеет эйлерова цикла.

г) Граф связный, найдём степени вершин:

$\text{indeg}(a)=2$ $\text{outdeg}(a)=1$

Следовательно, т.к. условия теоремы 5 не выполняются то, граф не имеет эйлерова цикла.

2. Задача. Найдите эйлеров цикл в эйлеровом графе



эйлеров цикл 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

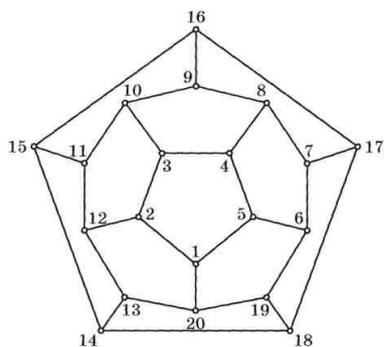
Решение. После выбора вершины a и прохождения рёбер 1 и 2 имеются три возможности выбора: рёбра 3, 6 или 7. Выбираем ребро 3 или 6. Например, ребро 3. Далее обходим оставшиеся рёбра и получаем

3.Задача. Найдите цикл, содержащий все вершины додекаэдра, причём в точности по одному разу каждую.

Решение.

Этот цикл: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 19, 18, 14, 15, 16, 17, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20.

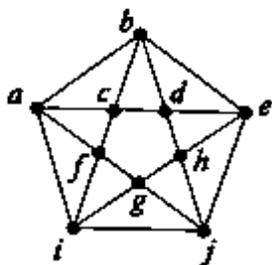
Этот цикл называется гамильтоновым циклом.



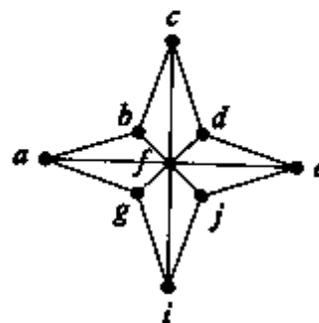
Задание:

1. Проработать алгоритм выполнения поиска эйлера и гамильтонова пути (изобразите графы, содержащие эти пути)
2. Среди приведённых ниже графов найдите те, которые имеют эйлеров и гамильтонов цикл. Результат проверить при помощи программы Grafoanalizator1.3.3.

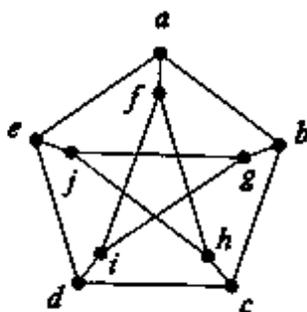
а)



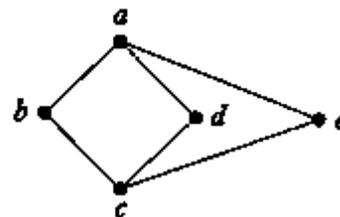
б)



в)

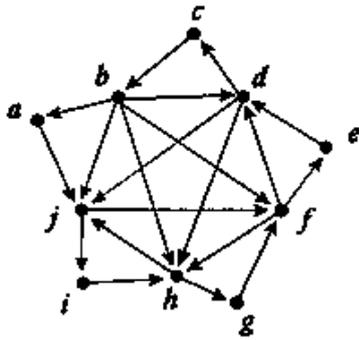


г)

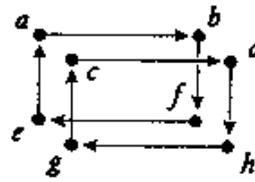


2. Какие из следующих ориентированных графов имеют эйлеровы и гамильтоновы циклы?

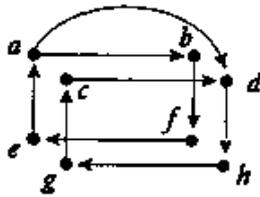
а)



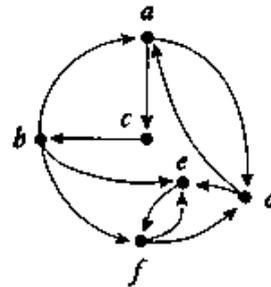
б)



в)



г)



Контрольные вопросы:

1. Дайте определение эйлерова графа.
2. Сформулируйте алгоритм построения эйлерова цикла.
3. Какой граф называют гамильтоновым?
4. Существует ли эйлеров граф, обладающий висячей вершиной?
5. Чем отличается эйлеров путь от гамильтонова?