

## Практическое занятие №12

**Тема:** «Выполнение основных алгебраических операций над графами».

**Цель:** закрепить умения вычислять числовые характеристики и выполнять операций над графами.

**Оборудование и материалы:** тетрадь, ручка.

**Время выполнения:** 2 часа.

1. Величину  $d(v,w)$  (конечную или бесконечную) будем называть расстоянием между вершинами  $v$ ,  $w$ . Это расстояние удовлетворяет аксиомам метрики:  $-d(v,w) \geq 0$ , причем  $d(v,w)=0$  тогда и только тогда, когда  $v=w$ ;  $-d(v,w)=d(w,v)$ ;  $-d(v,w)=d(v,u)+d(u,w)$ .

2. Диаметром связного графа называется максимально возможное расстояние между двумя его вершинами.

3. Центром графа называется такая вершина, что максимальное расстояние между ней и любой другой вершиной является наименьшим из всех возможных.

4. Наименьшее из всех возможных расстояний между вершиной и любой другой вершиной называется радиусом графа.

5. Матрица  $D(G)$  расстояний между вершинами графа – это матрица, элементами  $d_{ij}$  которой являются кратчайшие расстояния между вершинами  $v_i$  и  $v_j$ . Матрица  $D(G)$  симметрична относительно главной диагонали.

6. Для получения новых графов можно использовать разнообразные операции над графами. Существуют два вида операций - локальные, при которых заменяются, удаляются или добавляются отдельные элементы графа, и алгебраические, когда новый граф строится по определенным правилам из нескольких имеющихся.

7. Локальные операции – это удаление и добавление ребра или вершины, стягивание и подразбиение ребра.

8. При удалении ребра сохраняются все вершины графа и все его ребра, кроме удаляемого. Обратная операция - добавление ребра.

9. При удалении вершины вместе с вершиной удаляются и все инцидентные ей ребра. При добавлении вершины к графу добавляется новая изолированная вершина.

10. Операция стягивания ребра определяется следующим образом. Вершины  $a$  и  $b$  удаляются из графа, к нему добавляется новая вершина  $c$  и она соединяется ребром с каждой вершиной, с которой была смежна хотя бы одна из вершин  $a$ ,  $b$ .

11. Операция подразбиения ребра действует следующим образом. Из графа удаляется это ребро, к нему добавляется новая вершина и два новых ребра  $(a,c)$  и  $(b,c)$ .

12. Дополнением графа  $G_1(V_1, E_1)$ , называется граф  $G_2(V_2, E_2)$ , множеством вершин которого является множество  $V_1$ , а множеством его рёбер является множество  $\overline{E_1} = \{e \in V_1 \times V_2 : e \notin E_1\}$ .

13. Объединением графов  $G_1(V_1, E_1)$  и  $G_2(V_2, E_2)$  при условии, что  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , называется граф  $G_1(V_1, E_1) \cup G_2(V_2, E_2)$ , множеством вершин которого является множество  $V_1 \cup V_2$ , а множеством его рёбер является множество  $E_1 \cup E_2$ .

14. Пересечением графов  $G_1(V_1, E_1)$  и  $G_2(V_2, E_2)$ , называется граф  $G_1(V_1, E_1) \cap G_2(V_2, E_2)$ , множеством вершин которого является множество  $V_1 \cap V_2$ , а множеством его рёбер является множество  $E_1 \cap E_2$ .

15. Суммой по модулю два графов  $G_1(V_1, E_1)$  и  $G_2(V_2, E_2)$  при условии, что,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  называется граф  $G_1(V_1, E_1) \oplus G_2(V_2, E_2)$ , множеством вершин которого является множество  $V_1 \cup V_2$ , а множеством его рёбер – множество  $E_1 \oplus E_2$ . Т.е. этот граф не имеет

изолированных вершин и состоит только из рёбер, присутствующих либо в первом графе, либо во втором графе, но не в обоих графах одновременно.

Задание 1.

1. Дан неориентированный граф. Определить

- диаметр и радиус этого графа;
- центры графа;
- цикломатическое число данного графа.

2. Выполнить следующие действия:

- удалить ребро (1; 2) и вершину 5;
- добавить вершину 7;
- добавить ребра (2; 6) и (3; 7);
- стянуть ребро (3; 4)

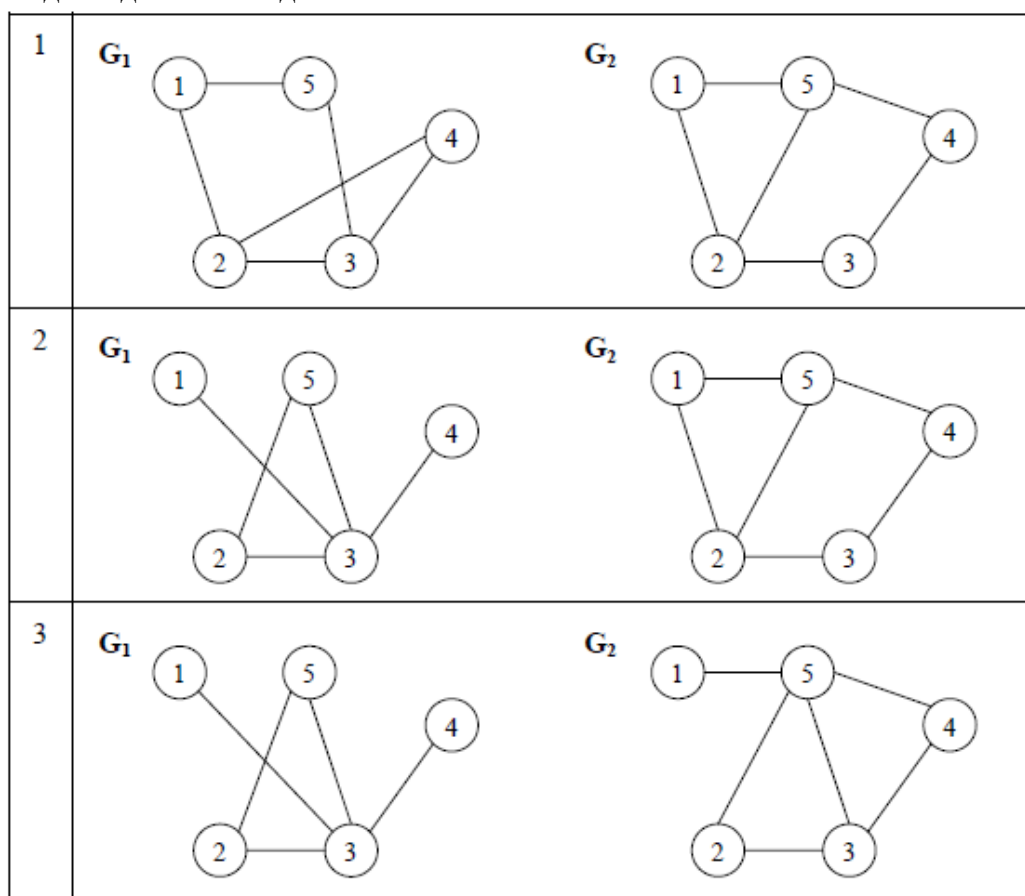
3. Даны два графа  $G_1$  и  $G_2$ . Построить их дополнения, пересечение, объединение и сумму по модулю два.

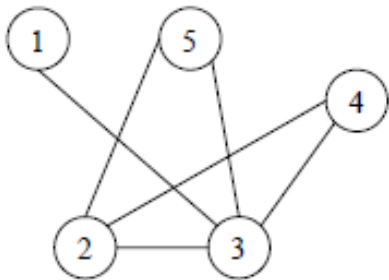
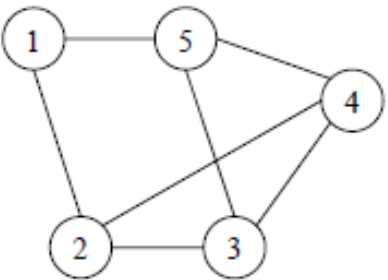
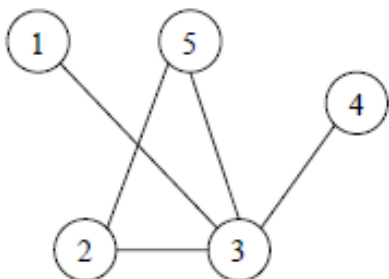
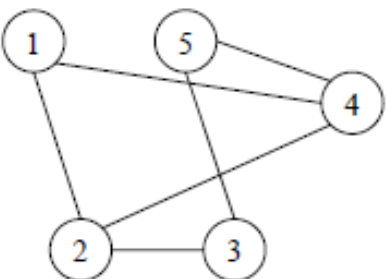
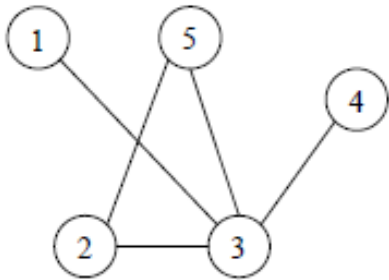
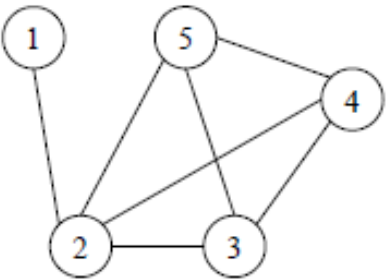
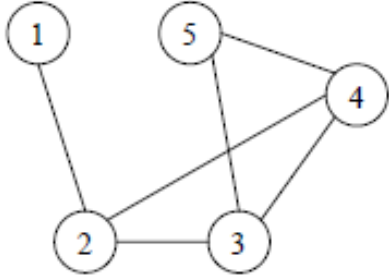
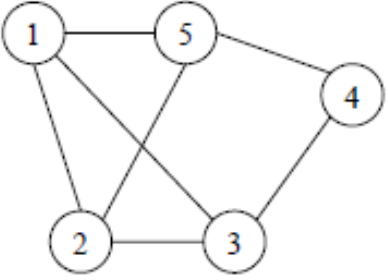
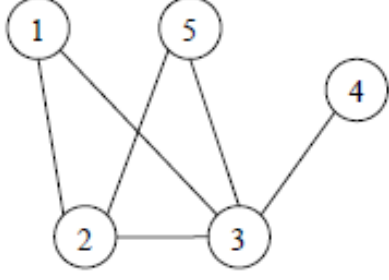
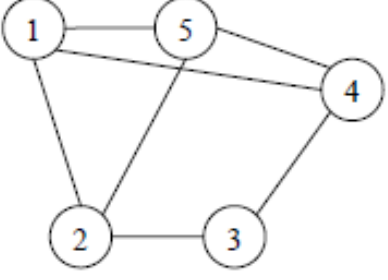
Исходные данные к заданию 1 – 1, 2:

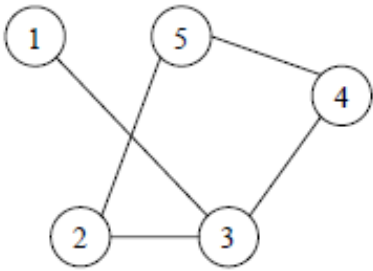
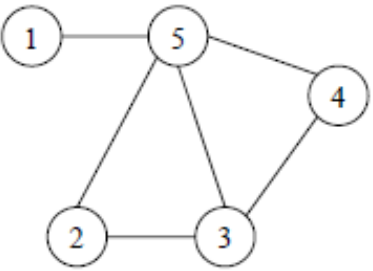
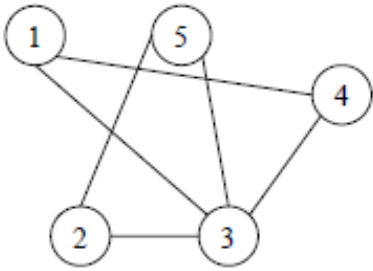
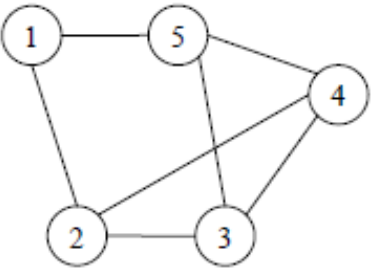
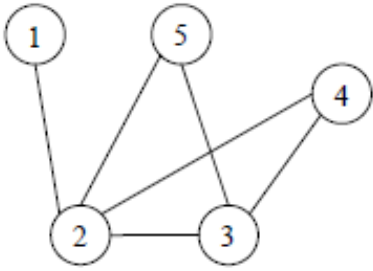
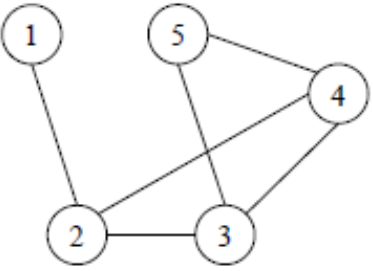
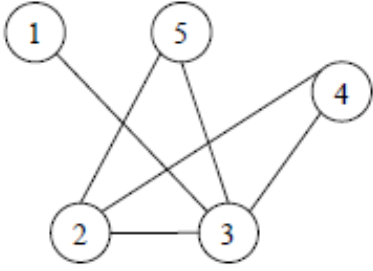
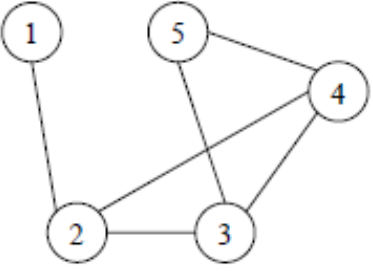
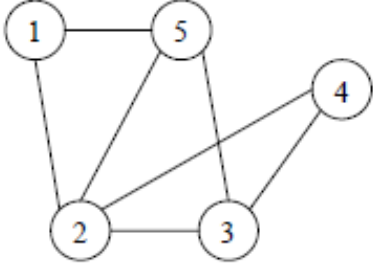
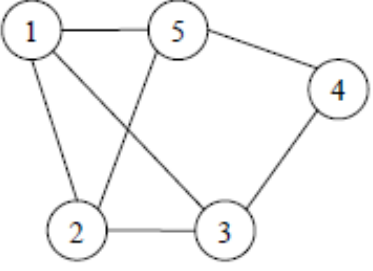
1	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (2; 4); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$	2	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (2; 6); (2; 5); (3; 6); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$
3	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (2; 3); (2; 5); (3; 5); (3; 4); (4; 6); (5; 1)\}$	4	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 6); (2; 3); (2; 5); (3; 6); (3; 4); (4; 5); (5; 1)\}$
5	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 5); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 3)\}$	6	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 5); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 4); (5; 6)\}$
7	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (5; 3); (6; 1)\}$	8	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 3); (1; 4); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (5; 3); (6; 1)\}$
9	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 3); (2; 4); (3; 4); (5; 6)\}$	10	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 3); (1; 6); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (5; 3)\}$
11	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 5); (2; 6); (3; 6); (3; 4); (4; 5); (5; 6)\}$	12	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 6); (2; 6); (3; 5); (4; 3); (4; 5)\}$
13	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (2; 4); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$	14	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (3; 6); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$
15	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (2; 3); (2; 5); (3; 5); (3; 4); (4; 6)\}$	16	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 6); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (5; 1)\}$
17	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 3)\}$	18	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (2; 5); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 6)\}$

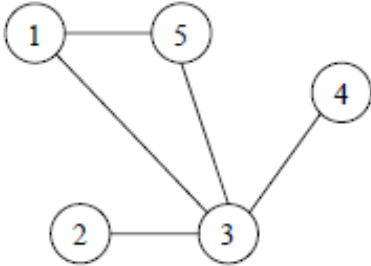
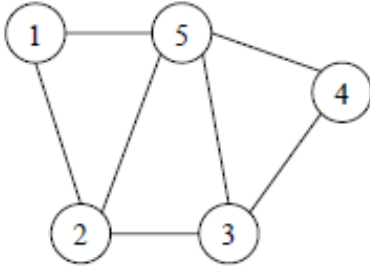
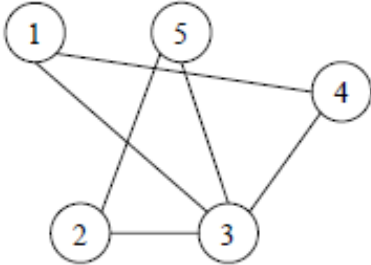
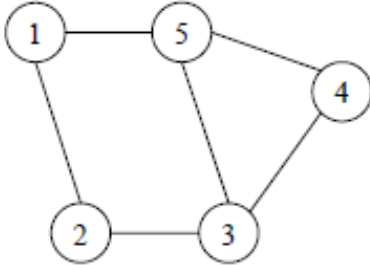
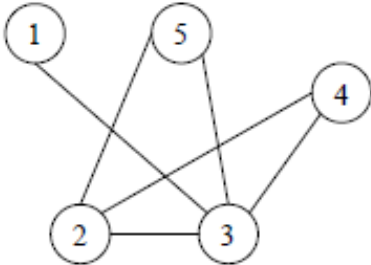
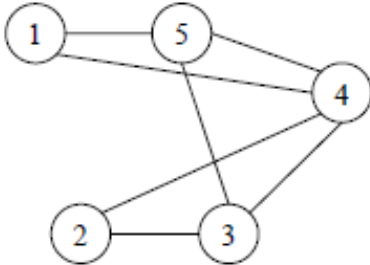
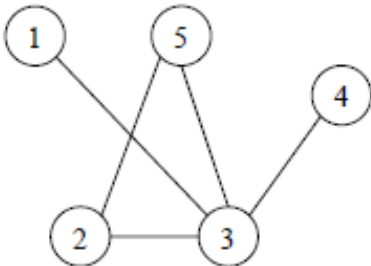
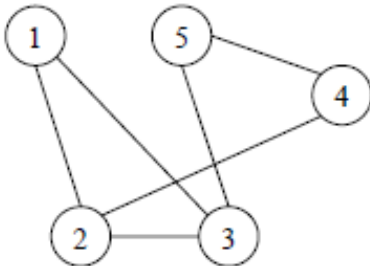
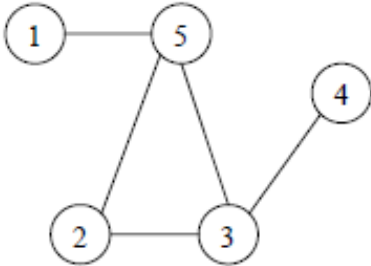
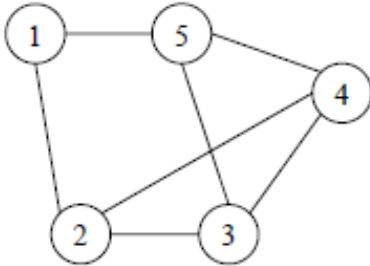
19	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 6); (5; 3); (6; 1)\}$	20	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 3); (1; 4); (2; 1); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (6; 1)\}$
21	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 5); (2; 3); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 6)\}$	22	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 6); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (5; 6)\}$
23	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (2; 4); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 6); (5; 1)\}$	24	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (3; 6); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (6; 1)\}$
25	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (1; 3); (2; 3); (4; 3); (5; 6)\}$	26	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 5); (2; 5); (3; 6); (4; 3); (4; 6)\}$
27	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (2; 4); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (5; 1)\}$	28	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (1; 5); (2; 5); (3; 5); (3; 4); (4; 5); (5; 6)\}$
29	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (2; 3); (2; 5); (3; 5); (3; 4); (4; 5); (5; 6)\}$	30	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (3; 6); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$

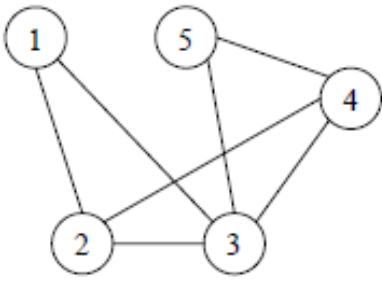
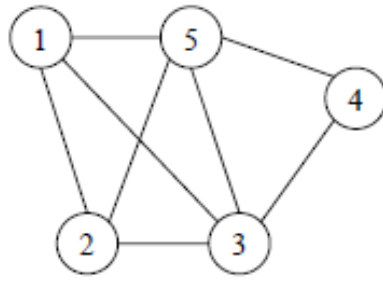
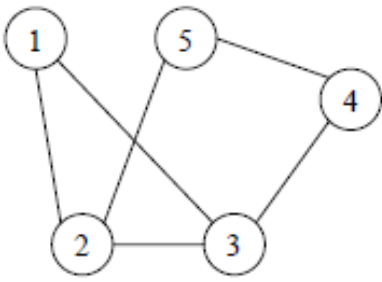
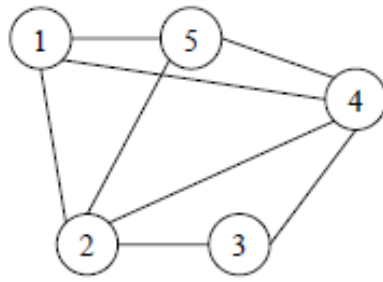
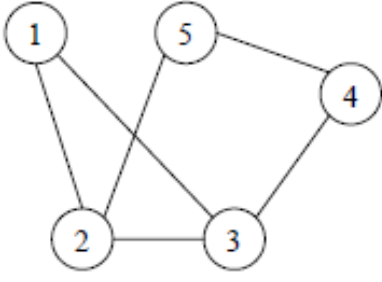
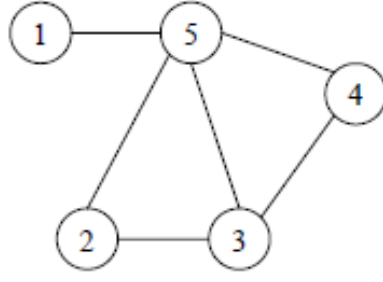
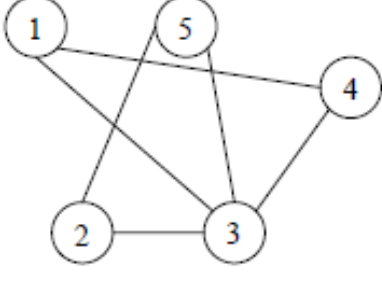
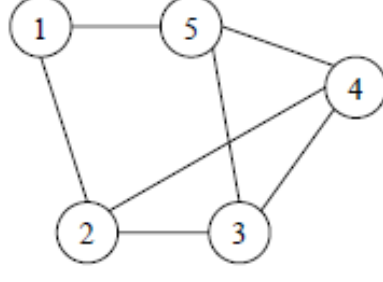
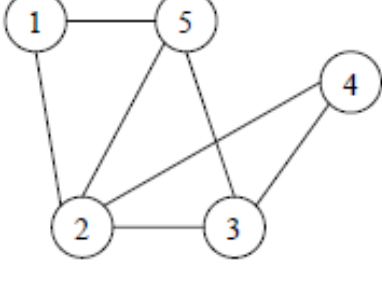
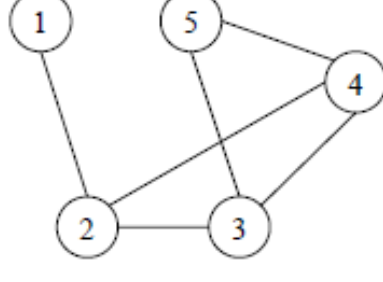
Исходные данные к заданию 1 – 3:

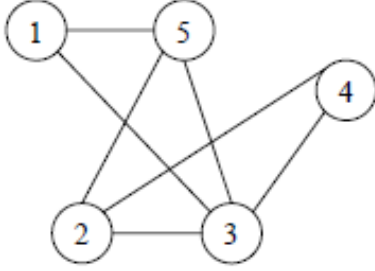
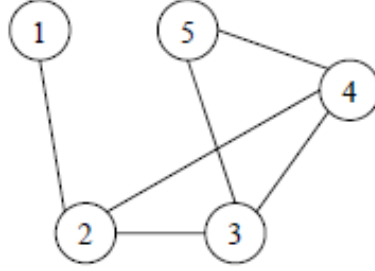
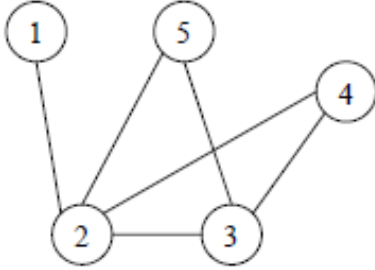
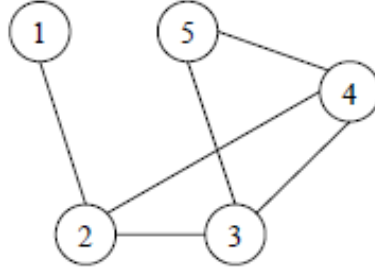
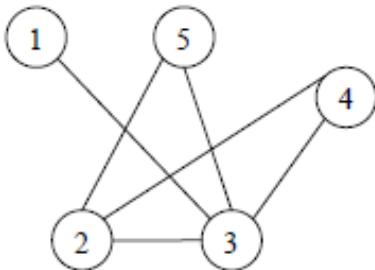
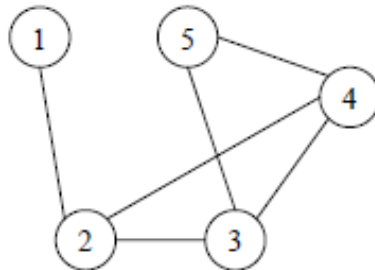
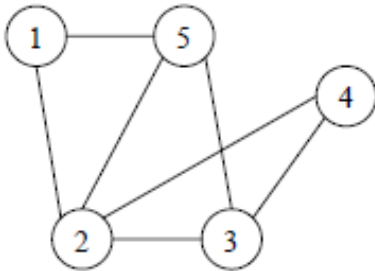
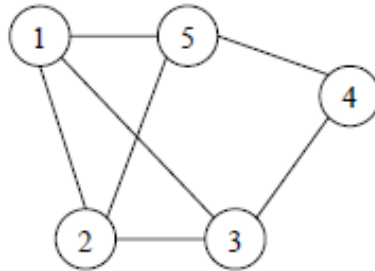
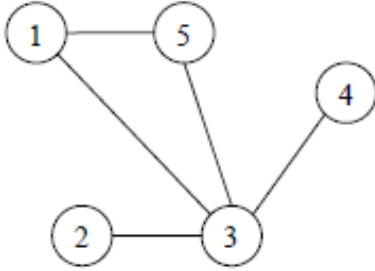
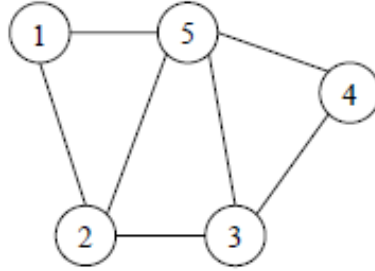


4	$G_1$ 	$G_2$ 
5	$G_1$ 	$G_2$ 
6	$G_1$ 	$G_2$ 
7	$G_1$ 	$G_2$ 
8	$G_1$ 	$G_2$ 

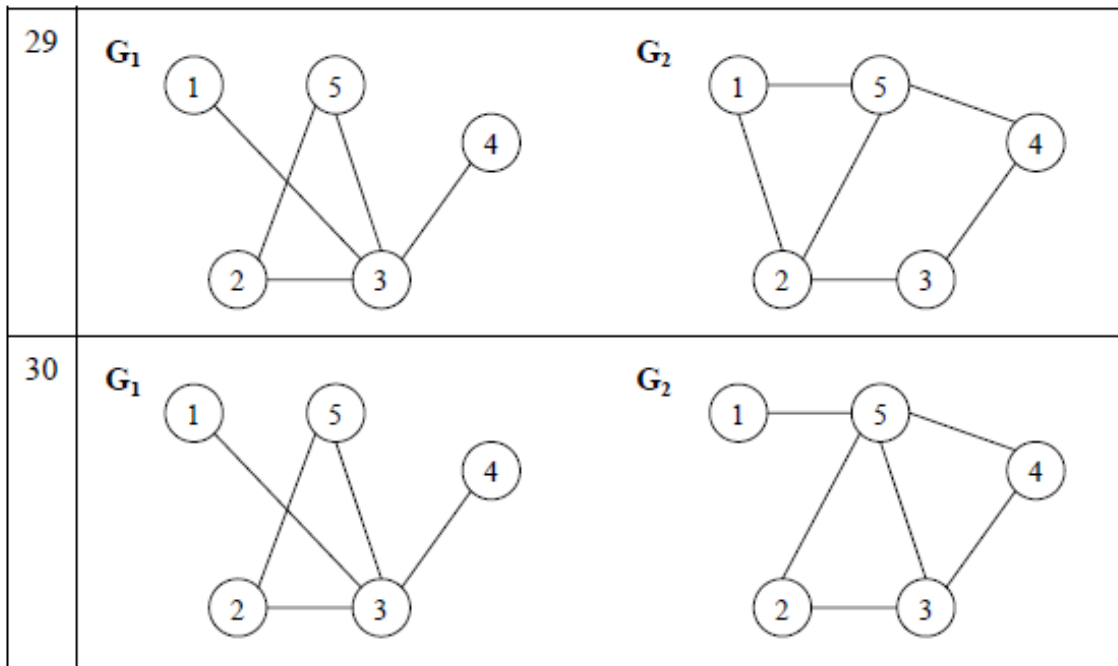
9	$G_1$ 	$G_2$ 
10	$G_1$ 	$G_2$ 
11	$G_1$ 	$G_2$ 
12	$G_1$ 	$G_2$ 
13	$G_1$ 	$G_2$ 

14	$G_1$ 	$G_2$ 
15	$G_1$ 	$G_2$ 
16	$G_1$ 	$G_2$ 
17	$G_1$ 	$G_2$ 
18	$G_1$ 	$G_2$ 

19	$G_1$ 	$G_2$ 
20	$G_1$ 	$G_2$ 
21	$G_1$ 	$G_2$ 
22	$G_1$ 	$G_2$ 
23	$G_1$ 	$G_2$ 

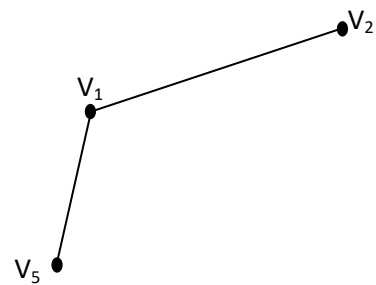
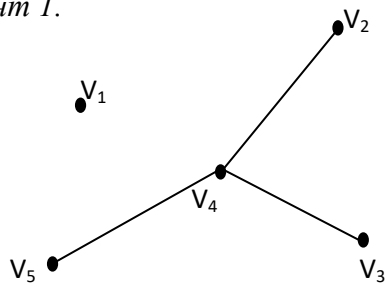
24	$G_1$ 	$G_2$ 
25	$G_1$ 	$G_2$ 
26	$G_1$ 	$G_2$ 
27	$G_1$ 	$G_2$ 
28	$G_1$ 	$G_2$ 



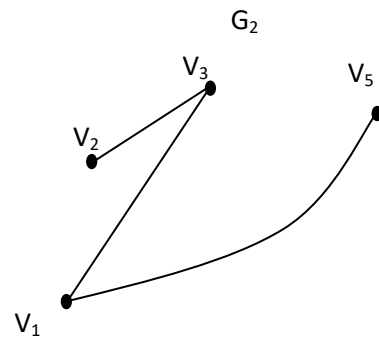
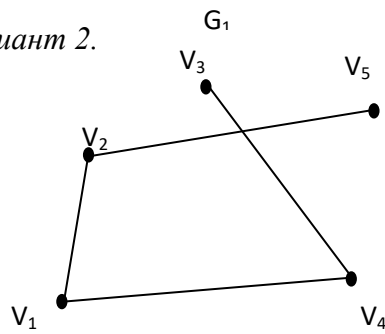


Задание 2. Найдите объединение и пересечение графов  $G_1$  и  $G_2$ , дополнение до графа  $G_1$ .

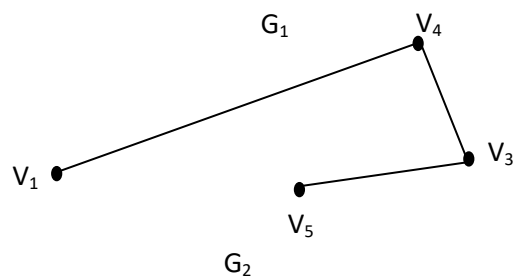
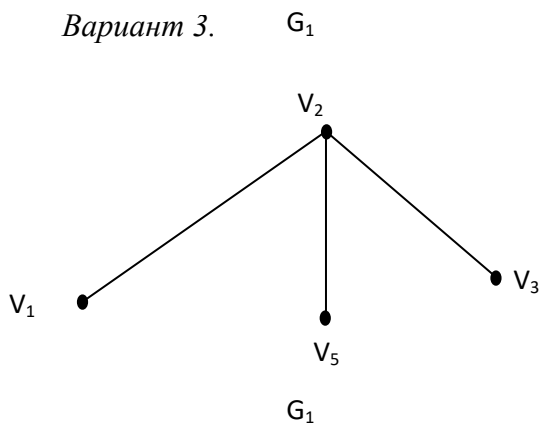
*Вариант 1.*



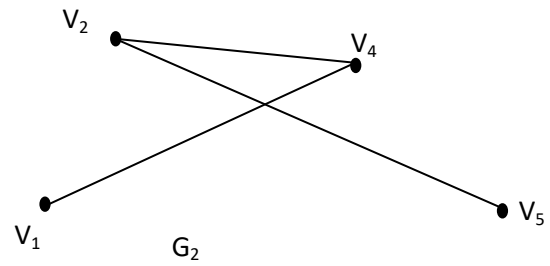
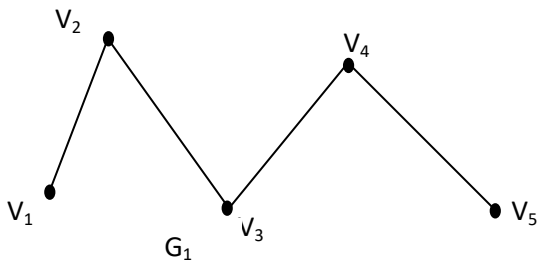
*Вариант 2.*



*Вариант 3.*



Вариант 4.



**Контрольные вопросы:**

1. Что такое расстояние между вершинами графа?
2. Что такое диаметр графа?
3. Что такое радиус графа?
4. Что такое центр графа?
5. Для чего служит матрица расстояний в графе?
6. Для чего выполняются действия над графами?
7. На какие группы можно разделить операции над графами?
8. Что такое локальные действия?
9. Какие действия относятся к локальным?
10. Как удалить и добавить ребро?
11. Как удалить и добавить вершину?