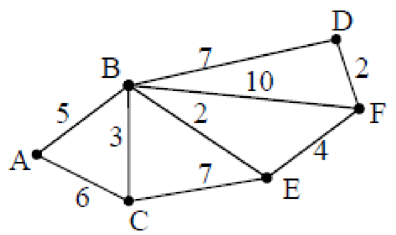
Практическое занятие №10

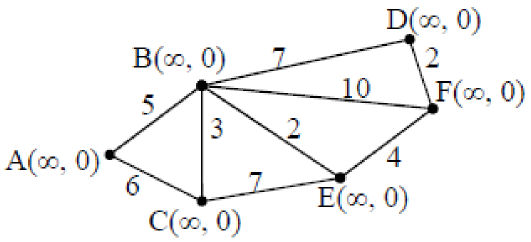
Тема: «Нахождение кратчайшего пути в графе».

Цель: Нахождение кратчайшего пути в ориентированных и неориентированный графах.
Оборудование и материалы: тетрадь, ручка.
Время выполнения: 2 часа.

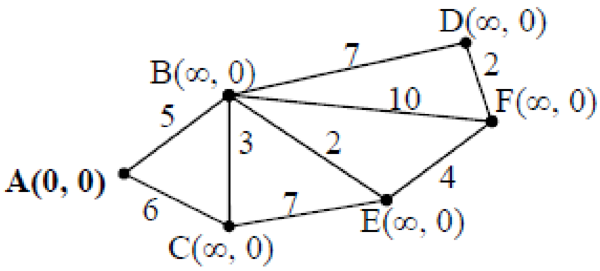
Порядок проведения работы

Пример. Пусть граф изображенный на рисунке 1.48 – взвешенный граф, в котором отыскивается кратчайшее расстояние от вершины A к вершине F. Поставив в соответствие каждой вершине упорядоченную пару (∞; 0) рассматриваемый граф приводим к виду, показанному на рис.

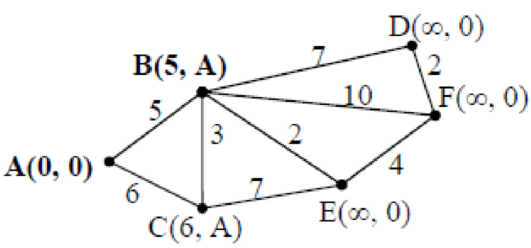




Приступим к построению путей от вершины A к другим вершинам. Первая компонента упорядоченной пары покажет длину кратчайшего пути к вер шине в момент достижения, а вторая компонента укажет на предыдущую вер-шину кратчайшего пути. Первая компонента будет содержать ∞, а вторая – 0 до тех пор, пока путь не найден. Вершина, которая стала постоянной, будет выделена. Выполнив шаг 1 алгоритма, получаем граф, изображенный на рисунке.



Поскольку вершины B и C – смежные с вершиной A, выполняем шаг 2 и упорядоченной паре для вершины B присваиваем значение (5, A), а упорядоченной паре для вершины C присваиваем значение (6, A). (Фактически изменения вносятся, тогда и только тогда, когда новые расстояния меньше старых, но поскольку старые расстояния до вершины B и C равны ∞, в данном случае это не имеет значения). Выполнив шаг 3, выбираем наименьшее из временных присвоенных значений. В данном случае это расстояние до вершины A равное 5, и вершину B (5, A) делаем постоянной. Таким образом, получаем рисунок.



Возвращаясь к шагу 2, рассмотрим временные вершины C, D, E, F, смежные с вершиной B. В каждом случае прибавляем расстояние от вершины A к вершине B к расстоянию от вершины B к данным вершинам. Таким образом, для вершины C это будет $5 + 3 = 8$. Для вершины D имеем $5 + 7 = 12$. Для вершины E имеем $5 + 2 = 7$. Для вершины F имеем $5 + 10 = 15$. Поскольку новое расстояние до вершины C не меньше, чем уже присвоенное, упорядоченную пару $C(6, A)$ оставляем без изменений. Новые расстояния до вершин D, E, F меньше уже присвоенных, поэтому им задаем значения, которые получены для пути из вершины B, то есть меняем их на $D(12, B)$, $E(7, B)$, $F(15, B)$.
Выполнив шаг 3, находим наименьшее из расстояний, присвоенных временным вершинам, поэтому берем $\min\{6, 12, 15, 7\} = 6$, и поскольку вершина C имеет это расстояние делаем вершину $C(6, A)$ постоянной. Таким образом, получаем рис.

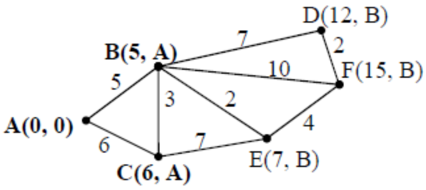
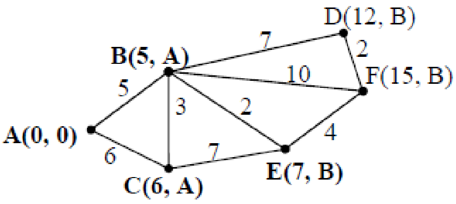
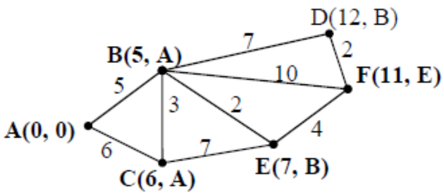


Рис. 1.52

Теперь берем новую постоянную вершину C. Выполнение шага 2 не приводит к изменениям. Выполнив шаг 3, делаем вершину $E(7, B)$ постоянной. Получает в результате рис.

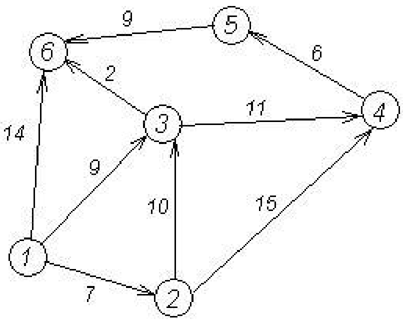


Берем новую постоянную вершину E и, используя шаг 2, меняем $F(15, B)$ на $F(11, E)$. Выполнив шаг 3, делаем вершину $F(11, E)$ постоянной. Таким образом, получаем рис.



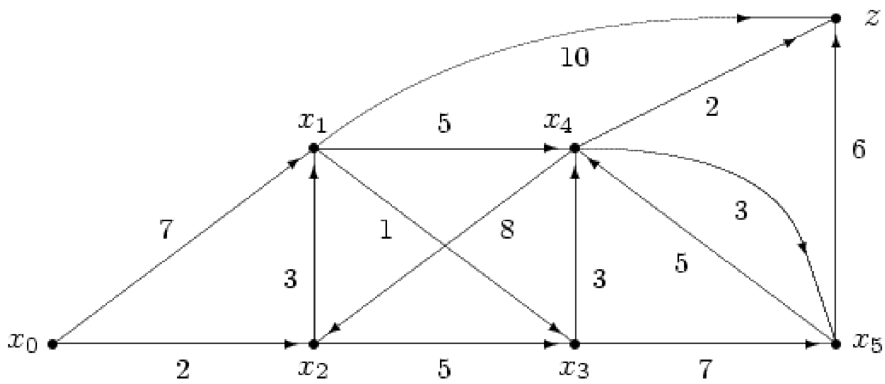
Вершина F стала постоянной, поэтому процесс завершен и 11 – это кратчайшее расстояние от вершины A к вершине F. Если бы совокупность вершин смежных с постоянной вершиной, была исчерпана до того, как мы достигли вершину F, то задача не имела бы решения, поскольку бы не было бы пути от вершины A к вершине F. Для нахождения кратчайшего пути заметим, что вершине F предшествует вершина E, вершине E предшествует вершина B, а вершине B предшествует вершина A. Поэтому кратчайшим путем является $ABEF$.

Задача 1.
Найти расстояния от 1-й вершины до всех остальных.

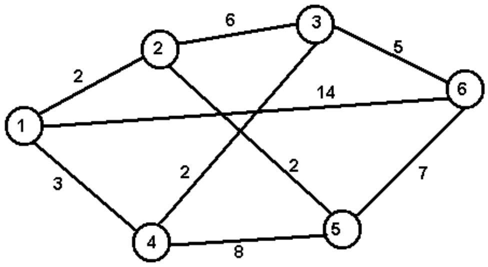


Задача 2.
необходимо добраться на самолете из города А в город В при условии, что между ними нет прямого авиационного сообщения, затратив при этом минимальные средства (при условии, что заданы возможные промежуточные аэропорты, для каждой пары аэропортов известно, существует ли между ними прямой маршрут, и если да, то известна минимальная стоимость перелета по этому маршруту).

Задача 3.
Пусть Г(X, U, Ф) — простой орграф, для каждого ребра u ∈U определен вес w(u)≥0.
Найти кратчайший путь между выделенными вершинами x_0 и z.



Задача 3.
Найдите кратчайший путь из вершины **1** в вершину **6**, используя **алгоритм Дейкстры**:



Контрольные вопросы:

1. Достоинства и недостатки алгоритма Дейкстры.
2. Основное отличие алгоритма Дейкстры от алгоритма Беллмана-Форда.
3. В чем заключается сложность алгоритма Дейкстры?
4. Что такое отрицательный вес ребра?