

Практическое занятие №1

Вычисление погрешностей результатов арифметических действий над приближёнными числами.

Цель: сформировать у студентов знания, умения и навыки работы с приближенными числами в применении формул погрешностей элементарных действий и функций, нахождения значений выражений по способу границ и методом строгого учета абсолютных погрешностей после каждой операции.

Норма времени: 2 часа

Порядок выполнения работы

Теоретические сведения

e_x – абсолютная погрешность.

δ_x – относительная погрешность.

x – точное значение величины.

$\bar{x}$ – приближенное значение величины (приближение)

$$e_x = |x - \bar{x}| \qquad \delta_x = \frac{e_x}{x}$$

Пример 1. Дано число $x=0,00006$ и его приближение $\bar{x}=0,00005$. Найти абсолютную и относительную погрешности приближения.

Решение: $e_x = |0,00006 - 0,00005| = 0,00001$

$$\delta = \frac{0,00001}{0,00005} = 0,2 = 20\%$$

Ответ: абсолютная погрешность 0,00001 и относительная погрешность приближения равна 20%

Пример 2. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности числа $x = 984,6$, если оно имеет только верные цифры в строгом смысле.

Решение: Цифры числа верны в строгом смысле, если абсолютная погрешность данного числа не превосходит половины единицы разряда, в котором записана последняя верная цифра числа.

$$e_x = \frac{0,1}{2} = 0,05 \text{ (т.к. 6 – последняя верная цифра, стоит в разряде десятых)}$$

$$\delta_x = \left| \frac{e_x}{x} \right| \cdot 100\% = \frac{0,05}{984,6} \cdot 100\% = 0,0051\%$$

Ответ: абсолютная погрешность для числа x $e_x=0,05$

относительная погрешность числа x $\delta_x=0,0051$

Пример 3. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности числа $x = 2,364$, если оно имеет только верные цифры в широком смысле.

Решение: Цифры числа верны в широком смысле, если абсолютная погрешность данного числа не превосходит единицы разряда, в котором записана последняя верная цифра числа.

$e_x = 0,001$ (последняя цифра 4 – разряд тысячных)

$$\delta_x = \left| \frac{e_x}{x} \right| \cdot 100\% = \frac{0,001}{2,364} \cdot 100\% = 0,0423\%$$

Ответ: абсолютная погрешность для числа x $e_x = 0,001$
 относительная погрешность числа x $\delta_x = 0,0423\%$.

Погрешность округленного числа.

Пример 4: Округляя число $x=1,1426$ до четырех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученных приближений. Цифры верны в широком смысле.

Решение:

По определению верной цифры в широком смысле абсолютная погрешность $e_x=0,0001$

Округлим число x до четырех значащих цифр: $x_1=1,143$

Погрешность округленного числа равна сумме погрешности исходного числа и погрешности округления:

$$\Delta_{\text{окр}} = |1,143 - 1,1426| = 0,0004$$

$$e_{x1} = 0,0004 + 0,0001 = 0,0005$$

$$\delta_{x_1} = \left| \frac{e_{x_1}}{x_1} \right| = \frac{0,0005}{1,143} = 0,000437 < 0,04\%$$

Пример 5: Число x , все цифры которого верны в строгом смысле округлить до трех значащих цифр после запятой. Для полученного результата x_1 вычислить границу абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа x_1 указать количество верных цифр погрешности. $x=1,1426$

Решение:

$$e_x = \frac{0,0001}{2} = 0,00005$$

$$x_1 = 1,143$$

$$e_{x1} = e_x + \Delta_{\text{окр}}$$

$$\Delta_{\text{окр}} = |1,143 - 1,1426| = 0,0004$$

$$e_{x1} = 0,00005 + 0,0004 = 0,00045 < 0,0005 = \frac{0,001}{2}$$

Значит в числе 1,143 цифры верны в строгом смысле до тысячных по абсолютной погрешности.

$$\delta_{x_1} = \left| \frac{e_{x_1}}{x_1} \right| = \frac{0,00045}{1,143} = 0,00039 = 0,039\% < 0,04$$

Вычислительная погрешность

1. Погрешность суммирования чисел $x \pm e_x$, $y \pm e_y$

Абсолютная погрешность:

$$z = (x \pm e_x) + (y \pm e_y) = (x + y) \pm (e_x + e_y)$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{e_x + e_y}{|x + y|} = \frac{e_x}{|x + y|} \frac{|x|}{|x|} + \frac{e_y}{|x + y|} \frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x + y|} \delta_x + \frac{|y|}{|x + y|} \delta_y$$

2. Погрешность вычитания чисел $x \pm e_x, y \pm e_y$

Абсолютная погрешность:

$$z = (x \pm e_x) - (y \pm e_y) = (x - y) \pm (e_x + e_y)$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{e_x + e_y}{|x - y|} = \frac{e_x}{|x - y|} \frac{|x|}{|x|} + \frac{e_y}{|x - y|} \frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x - y|} \delta_x + \frac{|y|}{|x - y|} \delta_y$$

3. Погрешность умножения чисел $x \pm e_x, y \pm e_y$

Абсолютная погрешность:

$$z = (x \pm e_x) * (y \pm e_y) = xy \pm ye_x \pm xe_y \pm e_x e_y \approx xy \pm ye_x \pm xe_y$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{|y|e_x + |x|e_y}{|x \cdot y|} = \frac{e_x}{|x|} + \frac{e_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y$$

4. Погрешность деления чисел $x \pm e_x, y \pm e_y$

Абсолютная погрешность:

$$z = \frac{x \pm e_x}{y \pm e_y} = \frac{(x \pm e_x) \cdot (y \pm e_y)}{(y \pm e_y) \cdot (y \pm e_y)} \approx \frac{x}{y} \pm \frac{y \cdot e_x + x \cdot e_y}{y^2}$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{|y| \cdot e_x + |x| \cdot e_y}{\left| \frac{x}{y} \right| y^2} = \frac{|y| \cdot e_x + |x| \cdot e_y}{y^2 \cdot \left| \frac{x}{y} \right|} = \frac{e_x}{|x|} + \frac{e_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y$$

Погрешности элементарных функций.

Погрешность функции, зависящей от одной переменной.

Абсолютная погрешность:

$$f(x \pm e_x) \approx f(x) \pm f'(x)e_x$$

$$\Delta f = f(x \pm e_x) - f(x) = |f'(x)|e_x$$

Относительная погрешность:

$$\delta_f = \frac{|\Delta f|}{|f|} = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|} e_x$$

Пример 6: Исходные числовые значения аргумента заданы цифрами, верными в строгом смысле. Найти абсолютную и относительную погрешности функции $f(x) = \cos(0,47)$. Определить количество верных цифр в строгом смысле по

относительной погрешности. В ответе сохранить верные цифры и одну сомнительную.

Решение:

Найдем значение функции $f(x)=\cos(0,47)=0,891568$

абсолютная погрешность:

$$\Delta f = |f'(x)|e_x$$

$$1) |f'(x)| = \sin(0,47)=0,452886285$$

$$2) e_{0,47} = \frac{0,01}{2} = 0,005$$

$$3) \Delta f = 0,452886285 \cdot 0,005 = 0,00226443.$$

Относительная погрешность:

$$\delta_f = \left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| e_x$$

$$\delta_f = \left| \frac{\sin(0,47)}{\cos(0,47)} \right| \cdot 0,005 = |\tan(0,47)| \cdot 0,005 = 0,50796589 \cdot 0,005 = 0,00253983 \leq 0,005 = \frac{0,01}{2}$$

Значит в числе 0,891568 две цифры после запятой верны в строгом смысле.

Ответ: 0,892

Пример 7. Вычислить значение величины с помощью метода строгого учета границ абсолютных погрешностей после каждой операции, цифры верны в строгом смысле.

$$A = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{b + \ln(a)}, \text{ если } a = 12,34, \quad b = 14,3$$

Решение:

Для получения значения величины A необходимо выполнить 6 действий. Будем вычислять абсолютную погрешность после каждого действия с целью определения количества верных цифр в промежуточных результатах.

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\ln(a)$	$b + \ln(a)$	A
12,34	14,3	3,513	3,78	7,29	2,5128	16,8	0,434
e_a	e_b	$e_{\sqrt{a}}$	$e_{\sqrt{b}}$	$e_{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$	$e_{\ln(a)}$	$e_{b + \ln(a)}$	e_A
0,005	0,05	0,00071	0,0066	0,0073	0,00041	0,050	0,0017

При пооперационном строгом учете ошибок промежуточные результаты после округления до одной запасной (с учетом вычисленной параллельно величины погрешности) и их погрешности заносят в таблицу

Значения погрешностей для удобства округлим до двух значащих цифр по избытку и тоже занесем в таблицу.

Цифры даны верными в строгом смысле, значит $e_a=0,005$, $e_b=0,05$

Найдем $\sqrt{12,34} = 3,51283$

$$\text{Абсолютная погрешность равна } e_a = \frac{e_x}{2\sqrt{x}} = \frac{0,005}{2 \cdot \sqrt{12,34}} = 0,0007117 \leq 0,005 = \frac{0,01}{2}$$

Из полученного значения погрешности видно, что в результате верны две значащие цифры после запятой, т.е.

$$\sqrt{12,34} = 3,51283 \approx 3,513 \text{ (сохраняем одну сомнительную цифру)}$$

Найдем $\sqrt{14,3} = 3,781534$

Абсолютная погрешность равна $e_b = \frac{e_x}{2\sqrt{x}} = \frac{0,05}{2 \cdot \sqrt{14,3}} = 0,00661107 \leq 0,05 = \frac{0,1}{2}$

Из полученного значения погрешности видно, что в результате верна одна значащая цифра после запятой, т.е.

$\sqrt{14,3} = 3,781534 \approx 3,78$ (сохраняем одну сомнительную цифру)

Найдем $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

$z = (x \pm e_x) + (y \pm e_y) = (x + y) \pm (e_x + e_y) = (3,513 + 3,78) \pm (0,00071 + 0,0066) = 7,293 \pm 0,00731$

т.к. $0,00731 \leq 0,05$, то в числе 7,293 одна верная цифра после запятой, т.е.
 $7,293 \approx 7,29$ (сохраняем одну сомнительную цифру)

Найдем $\ln(a) = \ln(12,34) = 2,51285$

Абсолютная погрешность: $e_{\ln a} = \frac{e_a}{a} = \frac{0,005}{12,34} = 0,000405 \leq 0,0005 = \frac{0,001}{2}$

В числе 2,512846 верны три значащие цифры после запятой, т.е.

$\ln(12,34) = 2,512846 \approx 2,5128$ (сохраняем одну сомнительную цифру)

Найдем $b + \ln(a) = (14,3 + 2,5128) \pm (0,05 + 0,00041) = 16,8128 \pm 0,050405$

Т.к. $0,050405 \leq 0,5 = \frac{1}{2}$, то в числе 16,8128 верны цифры до единиц $16,8128 \approx$

16,8 (сохраняем одну сомнительную цифру)

Найдем А

$A = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{b + \ln(a)} = \frac{7,29}{16,8} = 0,4339285714$

$e_A = \frac{y \cdot e_x + x \cdot e_y}{y^2} = \frac{16,8 \cdot 0,0073 + 7,30 \cdot 0,05}{16,8^2} = \frac{0,48764}{282,24} = 0,0017 \leq 0,005 = \frac{0,01}{2}$

Округлим результат А до двух верных цифр после запятой, получим окончательный ответ: $A = 0,434$ (сохраняем одну сомнительную цифру)

Ответ: $A = 0,434 \pm 0,002$

Погрешности значений элементарных функций.

Таблица 1

Функция	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$\sqrt{x}$	$\frac{e_x}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2}\delta_x$
$\frac{1}{x}$	$\frac{e_x}{x^2}$	$\frac{e_x}{ x }$
$\sin(x)$	$ \cos(x) e_x$	$ \operatorname{ctg}(x) e_x$
$\cos(x)$	$ \sin(x) e_x$	$ \operatorname{tg}(x) e_x$
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{e_x}{\cos^2(x)}$	$\frac{2e_x}{ \sin(2x) }$
$\ln(x)$	$\frac{e_x}{x}$	$\frac{\delta_x}{ \ln(x) }$
$\lg(x)$	$\frac{e_x}{x \cdot \ln(10)}$	$\frac{\delta_x}{ \lg(x) \cdot \ln(10)}$
e^x	$e^x e_x$	$x \cdot \delta_x$
10^x	$10^x \cdot \ln(10) \cdot e_x$	$\ln(10) \cdot e_x$
x^y	$x^y \left(y \cdot \frac{e_x}{x} + \ln(x) \cdot e_y \right)$	$ y \ln(x) \cdot \delta_y + y \cdot \delta_x$
$\arcsin(x)$	$\frac{e_x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{e_x}{ \arcsin(x) \cdot \sqrt{1-x^2} }$
$\operatorname{arctg}(x)$	$\frac{e_x}{1+x^2}$	$\frac{e_x}{ \operatorname{arctg}(x) \cdot (1+x^2)}$

Задания для практического занятия №1.

Задание №1.

Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в строгом смысле; б) в широком смысле.

№ варианта	а)	б)	№ варианта	а)	б)
1	11,445	2,043	16	112,5	0,04453
2	8,345	0,288	17	0,576	2,5008
3	0,374	4,348	18	25,613	0,0748
4	41,72	0,678	19	0,4223	0,57
5	18,357	2,16	20	112,45	3,4
6	14,862	8,73	21	2,4516	0,863
7	0,3648	21,7	22	5,6432	0,00858
8	0,5746	236,58	23	12,688	4,636
9	5,634	0,0748	24	15,644	6,125
10	20,43	0,576	25	16,383	5,734
11	12,45	3,4453	26	18,275	0,00644
12	2,3445	0,745	27	3,75	6,8343

13	0,5746	42,884		28	26,3	4,8556
14	3,4	0,078		29	43,813	0,645
15	2,4342	0,57004		30	3,643	72,385

Задание №2.

Число x , все цифры которого верны в строгом смысле, округлить до трех значащих цифр. Для полученного результата $x_1 \approx x$ вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа x_1 указать количество верных цифр по погрешности.

№ варианта	x	№ варианта	x
1	3549	16	9,2038
2	32,147	17	2,3143
3	0,0002568	18	0,012147
4	7,544	19	0,86129
5	198,745	20	0,1385
6	37,4781	21	23,394
7	0,183814	22	0,003775
8	0,009145	23	718,21
9	11,3721	24	9,73491
10	0,2538	25	11,456
11	10,2118	26	0,1495
12	4,394	27	6,2358
13	0,8437	28	4,4005
14	129,66	29	2,3078
15	48,847	30	3,2175

Задание №3

Вычислить значение величины Z при заданных значениях чисел a, b, c используя систематический учет абсолютных погрешностей после каждой операции, а также с помощью метода границ. Найти абсолютную и относительную погрешности z и определить по ним количество верных цифр в z , если цифры a, b, c верны в строгом смысле.

№ вариант а	Задание	Исходные данные	№ вариант а	Задание	Исходные данные
1	$z = \frac{\ln(b+c)}{b-ac}$	a = 0,0399 b = 4,83 c = 0,0721	16	$z = a^2 + \sin(b - \ln(c))$	a = 8,317 b = 13,521 c = 6,123
2	$z = \frac{ab}{\cos(c-a)}$	a = 5,52 b = 3,27 c = 14,123	17	$z = \frac{b^2 + \ln(c)}{\sqrt{c-a}}$	a = 0,038 b = 3,9353 c = 5,75
3	$z = \frac{\sin(a + \sqrt{b})}{a - \sin(c)}$	a = 2,258 b = 0,027 c = 9,87	18	$z = \frac{\ln(a) + b}{ab - c}$	a = 7,345 b = 0,31 c = 0,09871

4	$z = \frac{\sqrt{a+b}}{a-c}$	a =1,0574 b =1,40 c =1,1236	19	$z = \frac{tg(a-b)}{a^2c+b}$	a =0,2471 b =0,0948 c =4,378
5	$z = \frac{a-tg(b)}{c+b}$	a =3,49 b =0,845 c =0,0037	20	$z = \frac{\sqrt{a+c}}{ab-c}$	a = 1,284 b = 4,009 c = 3,2175
6	$z = \frac{ac+3b}{\sqrt{b-c}}$	a =0,0976 b =2,371 c =1,15887	21	$z = \frac{\sin(a-\sqrt{b})}{c+\ln(b)}$	a = 18,407 b = 149,12 c = 2,3078
7	$z = \frac{\ln(a-b)}{\sqrt{b+c}}$	a =82,3574 b =34,12 c =7,00493	22	$z = \frac{a\ln(b)}{\sin(\sqrt{a}+c)}$	a = 29,49 b = 87,878 c = 4,403
8	$z = \frac{a^2-b}{\sqrt{ab-c}}$	a =3,71452 b =3,03 c =0,756	23	$z = \frac{0,8\ln(b)}{\sqrt{a+bc}}$	a = 74,079 b = 5,3091 c = 6,234
9	$z = \frac{b+\cos(c)}{b+a}$	a =0,11587 b =4,256 c =3,00971	24	$z = \frac{\sqrt{a}}{bc-\ln(c)}$	a =3,4 b =6,22 c =0,149
10	$z = \frac{(b-c)}{a+b}$	a = 4,05 b = 6,723 c = 0,03254	25	$z = \frac{\sqrt{ab}}{b-c}$	a =5,387 b =13,527 c =0,7565
11	$z = \frac{\ln(b)-a}{a^2-c}$	a = 0,7219 b = 135,347 c =0,013	26	$z = \frac{a-\sin(c)}{b^2+c}$	a = 1,75 b = 1,215 c = 0,041
12	$z = \frac{\ln(c)-a}{\sqrt{bc}}$	a = 0,113 b = 0,1056 c = 89,4	27	$z = \frac{b-\sin(a)}{a+c}$	a =3,672 b =4,63 c =0,0278
13	$z = \frac{c+\sqrt{b}}{a^2-b}$	a = 1,247 b = 0,346 c = 0,051	28	$z = \frac{\sqrt{ab}}{c} + a$	a =0,317 b =13,57 c =0,751
14	$z = \frac{\sqrt{b-c}}{\ln(a)+b}$	a = 18,035 b = 3,7251 c = 0,071	29	$z = \frac{a+b}{a\sqrt{b-c}}$	a =0,317 b =33,827 c =14,85
15	$z = \frac{\sqrt{a+b}}{ab-c}$	a = 0,317 b = 3,27 c = 4,7561	30	$z = \frac{ab-4c}{\ln(a)+b}$	a =12,72 b =0,34 c =0,0290

Вопросы по теме:

1. Что такое абсолютная и относительная погрешности?
2. Как классифицируют виды погрешностей?
3. Что значит цифра, верная в строгом, широком смыслах?
4. Как находится погрешность округленного числа?
5. Как определить количество верных цифр по абсолютной погрешности.