**Практическое занятие № 10**
**Вычисление характеристик для непрерывной случайной величины с помощью функции плотности и интегральной функции распределения.**

**Цель:** научиться определять характеристики непрерывных случайных величин.
**Норма времени:** 2 часа.
**Оборудование:** тетрадь, ручка.

**Порядок выполнения работы.**

***Краткая теория***

Для непрерывной случайной величины можно определить следующие числовые характеристики:

•**Математическое ожидание** – средневзвешенное по вероятностям значение случайной величины.

M(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ - если возможные значения X принадлежат всей числовой прямой.

•**Мода** – наиболее вероятное значение случайной величины X**.**

•**Дисперсия** – характеризует разброс случайной величины вокруг ее математического ожидания.

D(X) = $\int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - (M(x))^2$ - если возможные значения X принадлежат интервалу [a, b]

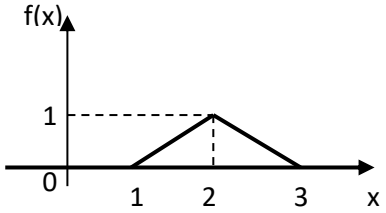
D(X) = $M(x^2)-(M(x))^2$

•**Среднее квадратичное отклонение** - $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$.

Рассмотрим примеры определения числовых характеристики непрерывных случайных величин.

***Пример 1***. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения. Найти математическое ожидание.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при} x < 1. \\ x - 1 \text{ при } 1 \le x < 2, \\ -x + 3 \text{ при } 2 \le x < 3, \\ 0 \text{ при} x \ge 3. \end{cases}$$




*Решение*

M(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} x(x-1)dx + \int_{2}^{3} x(-x+3)dx + \int_{3}^{\infty} 0dx = (x^3/3 - x^2/2)\Big|_1^2 + (3x^2/2 - x^3/3)\Big|_2^3 = \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right] - [\left(\frac{3*9}{2} - \frac{27}{3}\right) - \left(\frac{3*4}{2} - \frac{8}{3}\right) = 2.$

***Пример 2***. Случайная величина X задана плотностью распределения.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 0{,}5 \sin x, x \in (0; \pi), \\ 0, x \ge \pi \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и моду.

*Решение*

1. Математическое ожидание:

M(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ = 0,5$\int_0^{\pi} xsinxdx$.

Для нахождения интеграла используем формулу интегрирование по частям.

$$\left.\begin{array}{ll} U = x & dU = dx \\ dV = sinxdx & V = -cosx \end{array}\right\} \qquad \int_a^b UdV = UV|_a^b - \int_a^b VdU$$

$\int_0^{\pi} xsinxdx = x(-cosx)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-cosx)dx = [\pi(-cos\pi) - 0] + \sin x|_0^{\pi} = \pi + (\sin\pi - \sin 0) = \pi$

**M(X)** = 0,5$\int_0^{\pi} xsinxdx = 0{,}5 * \pi = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$.

2. Мода:

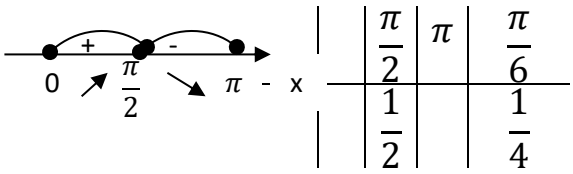
(0,5sinx)’ = 0,5 cosx

0,5cos x = 0

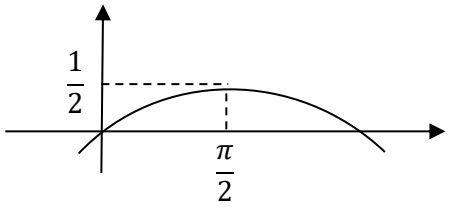
cosx = 0 при x = $\frac{\pi}{2}$ +$\pi k$ – критические точки данной функции на всей числовой прямой

x = $\frac{\pi}{2} \epsilon [0, \pi]$ – критическая точка в рассматриваемом интервале

Проверим точку x = $\frac{\pi}{2}$ на максимум:




| $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{\pi}{6}$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{4}$ |




Т.к. в точке x = $\frac{\pi}{2}$ производная меняет знак с“+”на“-“, то в этой точке плотность вероятности будет максимальна.

Мода: m = $\frac{\pi}{2}$

***Пример 3***. Случайная величина задана плотностью распределения:

f(x) = $\begin{cases} 0, \text{при} x < -1 \\ 3x^2, \text{при} -1 \le x \le 0 \\ 0, \text{при} x > 0 \end{cases}$ Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины.

*Решение*

1. Найдем математическое ожидание: M(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^{0} 3x^3 dx = 3x^4/4\Big|_{-1}^{0} = -3/4$.

2. Определим дисперсию.

D(X) = $\int_{-1}^{0} x^2 * 3x^2 dx - (-\frac{3}{4})^2 = \int_{-1}^{0} 3x^4 dx - \frac{9}{16} = 3\int_{-1}^{0} x^4\, dx - \frac{9}{16} = \frac{3x^5}{5}\Big|_{-1}^{0} - \frac{9}{16} = \left(0 - \frac{3*(-1)^5}{5}\right) - -\frac{9}{16} = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = 0.6 - 0.5625 = 0{,}0375$.

3. Среднее квадратичное отклонение: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0{,}0375} = 0{,}19$

**Задания для выполнения:**

**I вариант**

1. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при} x < -2 \\ 4x^2, \text{при} -2 \le x \le 2 \\ 0, \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение этой случайной величины

2. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при} x < 0 \\ 2x, \text{при } 0 \le x < 1 \\ 4 - 2x, \text{при } 1 \le x < 2 \\ 0, \text{при} x \ge 2 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание. Построить график f(x).

3. Случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при} x < -2 \\ -x^2 + 4x, \text{при } 1 \le x \le 2 \\ 1, \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти моду этой случайной величины

4. Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при} x < 0 \\ \frac{1}{4}\sin(x), \text{при } 0 \le x \le \pi \\ 0, \text{при} x > \pi \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и моду.

**II вариант**

1. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < -1 \\ 4x^2, \text{при} -1 \le x \le 1 \\ 0, \text{при} x > 1 \end{cases}$$

Найти дисперсию и среднеквадратичное отклонение этой случайной величины

2. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ \frac{1}{2}x, \text{при } 0 \le x < 2 \\ 2 - \frac{x}{2}, \text{при } 2 \le x < 4 \\ 0, \text{при } x \ge 4 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание. Построить график f(x).

3. Случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при} x < -2 \\ x^2 - 2x, \text{при } 1 \le x \le 2 \\ 1, \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти моду этой случайной величины

4. Случайная величина X задана плотностью распределения:

$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при} x < 0 \\ 2\sin(x), \text{при } 0 \le x \le \pi \\ 0, \text{при} x > \pi \end{cases}$ Найти математическое ожидание и моду.

**Контрольные вопросы:**

1. Чем отличаются формулы для нахождения математического ожидания дискретной и непрерывной случайных величин?
2. Что характеризуется медиана непрерывной случайной величины?